

## 九州大学 (文系) 2023 年 第 4 問

$\omega$  を  $x^3 = 1$  の虚数解のうち虚部が正であるものとする。さいころを繰り返し投げて、次の規則で 4 つの複素数  $0, 1, \omega, \omega^2$  を並べていくことにより、複素数の列  $z_1, z_2, z_3, \dots$  を定める。

- $z_1 = 0$  とする。
- $z_k$  まで定まったとき、さいころを投げて、出た目を  $t$  とする。このとき  $z_{k+1}$  を以下のように定める。
  - $z_k = 0$  のとき、 $z_{k+1} = \omega^t$  とする。
  - $z_k \neq 0, t = 1, 2$  のとき、 $z_{k+1} = 0$  とする。
  - $z_k \neq 0, t = 3$  のとき、 $z_{k+1} = \omega z_k$  とする。
  - $z_k \neq 0, t = 4$  のとき、 $z_{k+1} = \overline{\omega z_k}$  とする。
  - $z_k \neq 0, t = 5$  のとき、 $z_{k+1} = z_k$  とする。
  - $z_k \neq 0, t = 6$  のとき、 $z_{k+1} = \overline{z_k}$  とする。

ここで複素数  $z$  に対し、 $\bar{z}$  は  $z$  と共役な複素数を表す。以下の問いに答えよ。

- (1)  $\omega^2 = \bar{\omega}$  となることを示せ。
- (2)  $z_n = 0$  となる確率を  $n$  の式で表せ。
- (3)  $z_3 = 1, z_3 = \omega, z_3 = \omega^2$  となる確率をそれぞれ求めよ。
- (4)  $z_n = 1$  となる確率を  $n$  の式で表せ。