

定積分について述べた次の文章を読んで、後の問いに答えよ。

区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して、 $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び、 $f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \dots\dots ①$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A), (B), (C) をもつ。

$$(A) \quad \int_a^b \{kf(x) + lg(x)\} dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx$$

$$(B) \quad a \leq c \leq b \text{ のとき, } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$(C) \quad \text{区間 } a \leq x \leq b \text{ において } g(x) \geq h(x) \text{ ならば, } \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b h(x) dx$$

ただし、 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ は区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数、 k , l は定数である。

以下、 $f(x)$ を区間 $0 \leq x \leq 1$ で連続な増加関数とし、 n を自然数とする。定積分の性質 ア を用い、定数関数に対する定積分の計算を行うと、

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots ②$$

が成り立つことがわかる。 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと、不等式 ② と定積分の性質 イ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \quad \dots\dots ③$$

よって、はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx$ が成り立つ。

- (1) 関数 $F(x)$, $G(x)$ が微分可能であるとき、

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$$

が成り立つことを、導関数の定義に従って示せ。また、この等式と定積分の定義 ① を用いて、定積分の性質 (A) で $k = l = 1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

を示せ。

- (2) 定積分の定義 ① と平均値の定理を用いて、次を示せ。

$$a < b \text{ のとき, 区間 } a \leq x \leq b \text{ において } g(x) > 0 \text{ ならば, } \int_a^b g(x) dx > 0$$

- (3) (A), (B), (C) のうち、空欄 ア に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで、不等式 ② を示せ。

- (4) (A), (B), (C) のうち、空欄 イ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また、不等式 ③ を示せ。