

九州大学 (理系) 2002 年 第 5 (E) 問

正の実数 a の 3 乗根 $\sqrt[3]{a}$ を近似することを考える。与えられた 2 以上の整数 p に対して関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$\begin{cases} f(x) = x^p - ax^{p-3} \\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

とする。ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。次の問いに答えよ。

(1) $g(x) - \sqrt[3]{a}$ は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \times \frac{x \text{ の 2 次式}}{x \text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

(2) $p = 2$ とする。このとき、 $g(x) - \sqrt[3]{a}$ は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^3 \times \frac{x \text{ の 1 次式}}{x \text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

(3) $a = 9$, $p = 2$ とする。 $2 < \sqrt[3]{9} < 2.1$ に注意して、不等式

$$0 < \sqrt[3]{9} - g(2) < \frac{1}{1000}$$

が成り立つことを示せ。また、 $\sqrt[3]{9}$ を小数第 3 位まで求めよ (すなわち、小数第 4 位以下を切り捨てよ)。