

次の問いに答えよ。

- (1) すべての正の実数 x, y に対して, 不等式 $x \log x - x \log y - x + y \geq 0$ が成り立つことを示せ。ここで $\log$ は自然対数を表す。
- (2) a, b は実数で $a < b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数で, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ をみたす。このとき, 不等式

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq \int_a^b f(x) \log g(x) dx$$

が成り立つことを示せ。

- (3) a, b は実数で $a < b$ とする。閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ とする。不等式

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq M \log M$$

が成り立つことを示せ。