

九州大学（理系） 2002 年 第 2 問

正の整数 a に対し、 a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし、1 および a 自身も約数とする。たとえば、 $f(1) = 1$ であり、 $a = 15$ ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので、 $f(15) = 24$ となる。次の問いに答えよ。

- (1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a = 2^m b$ と表されるとき $f(a) = (2^{m+1} - 1)f(b)$ が成り立つことを示せ。
- (2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a = pq$ と表されるとき $f(a) \geq (p+1)q$ が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのは、 $q = 1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。
- (3) 正の偶数 a, b は、ある整数 m, n とある奇数 r, s を用いて $a = 2^m r, b = 2^n s$ のように表すことができる。このとき a, b が $f(a) = 2b, f(b) = 2a$ をみたせば、 r, s は素数であり、かつ $r = 2^{n+1} - 1, s = 2^{m+1} - 1$ となることを示せ。