

n を自然数として, $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ とおく。

(1) $x < 1$ において,

$$f(x) = -\log(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

が成り立つことを示せ。ここで, $\log$ は自然対数を表す。

(2) $|x| \leq \frac{1}{3}$ とするとき, 次の不等式が成り立つことを示せ。

(i) $x \geq 0$ において,
$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$$

(ii) $x < 0$ において,
$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

(iii)
$$\left| f(x) - f(-x) - \log \frac{1+x}{1-x} \right| \leq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$$

(3) この不等式を用いて, $\log 2$ の近似値を誤差が $\frac{1}{100}$ 以下となるような分数で求めよ。