入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

京都大学（理系）

対象年度： 2025 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 200 点

$\boxed{1}$

(35 点)

次の各問に答えよ．

問 1　i は虚数単位とする．複素数 z が，絶対値が 2 である複素数全体を動くとき，$\left| z - \dfrac{i}{z} \right|$ の最大値と最小値を求めよ．

問 2　次の定積分の値を求めよ．

$$(1)\quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}\,dx \qquad (2)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,dx$$

$\boxed{2}$

(35 点)

正の整数 x，y，z を用いて

$$N = 9z^2 = x^6 + y^4$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ．

$\boxed{3}$

(30 点)

e は自然対数の底とする．$x > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ において定義された次の関数 $f(x)$，$g(x)$ を考える．

$$f(x) = x^2 \log x$$
$$g(x) = x^2 \log x - \frac{1}{1+2\log x}$$

実数 t は $t > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ を満たすとする．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線に垂直で，点 $(t,\ g(t))$ を通る直線を l_t とする．直線 l_t が x 軸と交わる点の x 座標を $p(t)$ とする．t が $\dfrac{1}{\sqrt{e}} < t \leqq e$ の範囲を動くとき，$p(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ．

4

(35 点)

座標空間の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．s，t，u は 0 でない実数とする．直線 OA 上の点 L，直線 OB 上の点 M，直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つようにとる．

(1) s，t，u が $\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{t} + \dfrac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき，3 点 L，M，N の定める平面 LMN は，s，t，u の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ．さらに，そのような点 P はただ一つに定まることを示せ．

(2) 四面体 OABC の体積を V とする．(1) における点 P について，四面体 PABC の体積を V を用いて表せ．

5

(30 点)

θ は実数とする．xyz 空間の 2 点 A$\left(0,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$, P$\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$ を通る直線 AP が xy 平面と交わるとき，その交点を Q とする．θ が $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を求め，その軌跡を xy 平面上に図示せよ．

6

(35 点)

n は 2 以上の整数とする．1 枚の硬貨を続けて n 回投げる．このとき，k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ に表が出たら $X_k = 1$，裏が出たら $X_k = 0$ として，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を定める．

$$Y_n = \sum_{k=2}^{n} X_{k-1}X_k$$

とするとき，Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ．

問題は，このページで終わりである。