入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

京都大学（理系）

対象年度： 2024 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 200 点

$\boxed{1}$

(30 点)

n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_4 を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

$\boxed{2}$

(30 点)

$|x| \leqq 2$ を満たす複素数 x と，$|y-(8+6i)| = 3$ を満たす複素数 y に対して，$z = \dfrac{x+y}{2}$ とする．このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し，その面積を求めよ．

$\boxed{3}$

(30 点)

座標平面の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．線分 OA の中点を P，線分 AB の中点を Q とする．実数 x，y に対して，直線 OC 上の点 X と，直線 BC 上の点 Y を次のように定める．

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = x\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{BY}} = y\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

このとき，直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x，y に関する必要十分条件を求めよ．

$\boxed{4}$

(30 点)

与えられた自然数 a_0 に対して，自然数からなる数列 a_0，a_1，a_2，$\cdots$ を次のように定める．

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ．

(1)　a_0，a_1，a_2，a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．

(2)　a_0，a_1，$\cdots$，a_{10} がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．

$\boxed{5}$

(40 点)

a は $a \geqq 1$ を満たす定数とする．座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする．

$$x \geqq 0, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leqq y, \quad y \leqq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y \leqq a$$

次の問いに答えよ．

(1)　D_a の面積 S_a を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S_a$ を求めよ．

$\boxed{6}$

(40 点)

自然数 k に対して，$a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする．n を自然数とし，a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする．また，a_k の整数部分が n 桁であり，その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする．次を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{N_n}$$

ただし，例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で，最高位の数字は 2 である．

問題は，このページで終わりである。