

入学試験過去問題
数 学

京都大学（理系）

対象年度：2023年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

次の各問に答えよ.

問 1 定積分 $\int_1^4 \sqrt{x} \log(x^2) dx$ の値を求めよ.

問 2 整式 $x^{2023} - 1$ を整式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ で割ったときの余りを求めよ.

第 2 問

空間内の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. 点 D, P, Q を次のように定める. 点 D は $\vec{OD} = \vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC}$ を満たし, 点 P は線分 OA を $1:2$ に内分し, 点 Q は線分 OB の中点である. さらに, 直線 OD 上の点 R を, 直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める. このとき, 線分 OR の長さ と線分 RD の長さの比 $OR:RD$ を求めよ.

第 3 問

n を自然数とする. 1 個のさいころを n 回投げ, 出た目を順に X_1, X_2, \dots, X_n とし, n 個の数の積 $X_1 X_2 \cdots X_n$ を Y とする.

- (1) Y が 5 で割り切れる確率を求めよ.
- (2) Y が 15 で割り切れる確率を求めよ.

第 4 問

次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1 + \frac{1}{e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

ただし, e は自然対数の底であり, その値は $e = 2.71\cdots\cdots$ である.

第 5 問

O を原点とする xyz 空間において, 点 P と点 Q は次の 3 つの条件 (a), (b), (c) を満たしている.

- (a) 点 P は x 軸上にある.
- (b) 点 Q は yz 平面上にある.
- (c) 線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である.

点 P と点 Q が条件 (a), (b), (c) を満たしながらくまなく動くとき, 線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ.

第 6 問

p を 3 以上の素数とする. また, θ を実数とする.

- (1) $\cos 3\theta$ と $\cos 4\theta$ を $\cos \theta$ の式として表せ.
- (2) $\cos \theta = \frac{1}{p}$ のとき, $\theta = \frac{m}{n} \cdot \pi$ となるような正の整数 m, n が存在するか否かを理由をつけて判定せよ.