

入学試験過去問題
数 学

京都大学（理系）

対象年度：2022年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ。ただし、 $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

第 2 問

箱の中に 1 から n までの番号がついた n 枚の札がある。ただし $n \geq 5$ とし、同じ番号の札はないとする。この箱から 3 枚の札を同時に取り出し、札の番号を小さい順に X , Y , Z とする。このとき、 $Y - X \geq 2$ かつ $Z - Y \geq 2$ となる確率を求めよ。

第 3 問

n を自然数とする. 3 つの整数 $n^2 + 2$, $n^4 + 2$, $n^6 + 2$ の最大公約数 A_n を求めよ.

第 4 問

四面体 $OABC$ が

$$OA = 4, \quad OB = AB = BC = 3, \quad OC = AC = 2\sqrt{3}$$

を満たしているとする. P を辺 BC 上の点とし, $\triangle OAP$ の重心を G とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) $\vec{PG} \perp \vec{OA}$ を示せ.

(2) P が辺 BC 上を動くとき, PG の最小値を求めよ.

第 5 問

曲線 $C : y = \cos^3 x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする. $0 < t < \frac{\pi}{2}$ とし, C 上の点 $Q(t, \cos^3 t)$ と原点 O , および $P(t, 0)$, $R(0, \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 $OPQR$ の面積を $f(t)$ とする. このとき, 次の各問に答えよ.

- (1) S を求めよ.
- (2) $f(t)$ は最大値をただ 1 つの t でとることを示せ. そのときの t を α とすると,
 $f(\alpha) = \frac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$ であることを示せ.
- (3) $\frac{f(\alpha)}{S} < \frac{9}{16}$ を示せ.

第 6 問

数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を次の式

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + n + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$y_{3m+1} = 3m, \quad y_{3m+2} = 3m + 2, \quad y_{3m+3} = 3m + 4 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

により定める. このとき, 数列 $\{x_n - y_n\}$ の一般項を求めよ.