入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

京都大学（理系）

対象年度： 2022 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 200 点

$\boxed{1}$

(30 点)

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ．ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

$\boxed{2}$

(35 点)

箱の中に 1 から n までの番号がついた n 枚の札がある．ただし $n \geqq 5$ とし，同じ番号の札はないとする．この箱から 3 枚の札を同時に取り出し，札の番号を小さい順に X，Y，Z とする．このとき，$Y - X \geqq 2$ かつ $Z - Y \geqq 2$ となる確率を求めよ．

$\boxed{3}$

(35 点)

n を自然数とする．3 つの整数 n^2+2，n^4+2，n^6+2 の最大公約数 A_n を求めよ．

$\boxed{4}$

(30 点)

四面体 OABC が

$$\mathrm{OA} = 4, \quad \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 3, \quad \mathrm{OC} = \mathrm{AC} = 2\sqrt{3}$$

を満たしているとする．P を辺 BC 上の点とし，△OAP の重心を G とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2) P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ．

5

(35 点)

曲線 C : $y = \cos^3 x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$, x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする．$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $\mathrm{Q}\,(t,\ \cos^3 t)$ と原点 O，および $\mathrm{P}\,(t,\ 0)$, $\mathrm{R}\,(0,\ \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 OPQR の面積を $f(t)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) S を求めよ．

(2) $f(t)$ は最大値をただ 1 つの t でとることを示せ．そのときの t を α とすると，$f(\alpha) = \dfrac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$ であることを示せ．

(3) $\dfrac{f(\alpha)}{S} < \dfrac{9}{16}$ を示せ．

6

(35 点)

数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を次の式

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + n + 2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

$$y_{3m+1} = 3m, \quad y_{3m+2} = 3m + 2, \quad y_{3m+3} = 3m + 4 \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

により定める．このとき，数列 $\{x_n - y_n\}$ の一般項を求めよ．

問題は，このページで終わりである。