

入学試験過去問題

数学

京都大学（理系）

対象年度：2021年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

次の各問に答えよ.

- 問 1 xyz 空間の 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ を通る平面 α に関して点 $P(1, 1, 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ. ただし, 点 Q が平面 α に関して P と対称であるとは, 線分 PQ の中点 M が平面 α 上にあり, 直線 PM が P から平面 α に下ろした垂線となることである.
- 問 2 赤玉, 白玉, 青玉, 黄玉が 1 個ずつ入った袋がある. よくかきまぜた後に袋から玉を 1 個取り出し, その玉の色を記録してから袋に戻す. この試行を繰り返すとき, n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類全ての色が記録済みとなる確率を求めよ. ただし, n は 4 以上の整数とする.

第 2 問

曲線 $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ 上の点 P における接線は x 軸と交わるとし、その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを L とするとき、 L が取りうる値の最小値を求めよ。

第 3 問

無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos \frac{n\pi}{6}$ の和を求めよ.

第 4 問

曲線 $y = \log(1 + \cos x)$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ.

第 5 問

xy 平面において, 2 点 $B(-\sqrt{3}, -1)$, $C(\sqrt{3}, -1)$ に対し, 点 A は次の条件 (*) を満たすとする.

(*) $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ かつ点 A の y 座標は正.

次の各問に答えよ.

- (1) $\triangle ABC$ の外心の座標を求めよ.
- (2) 点 A が条件 (*) を満たしながら動くとき, $\triangle ABC$ の垂心の軌跡を求めよ.

第 6 問

次の各問に答えよ.

問 1 n を 2 以上の整数とする. $3^n - 2^n$ が素数ならば n も素数であることを示せ.

問 2 a を 1 より大きい定数とする. 微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a) = af(1)$ を満たすとき, 曲線 $y = f(x)$ の接線で原点 $(0, 0)$ を通るものが存在することを示せ.