入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

京都大学（理系）

対象年度： 2021 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

配点： 200 点

$\boxed{1}$

(40 点)

次の各問に答えよ．

問 1　xyz 空間の 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ -1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面 α に関して点 P$(1,\ 1,\ 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ．ただし，点 Q が平面 α に関して P と対称であるとは，線分 PQ の中点 M が平面 α 上にあり，直線 PM が P から平面 α に下ろした垂線となることである．

問 2　赤玉，白玉，青玉，黄玉が 1 個ずつ入った袋がある．よくかきまぜた後に袋から玉を 1 個取り出し，その玉の色を記録してから袋に戻す．この試行を繰り返すとき，n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類全ての色が記録済みとなる確率を求めよ．ただし，n は 4 以上の整数とする．

$\boxed{2}$

(30 点)

曲線 $y = \dfrac{1}{2}(x^2+1)$ 上の点 P における接線は x 軸と交わるとし，その交点を Q とおく．線分 PQ の長さを L とするとき，L が取りうる値の最小値を求めよ．

$\boxed{3}$

(30 点)

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{6}$ の和を求めよ．

$\boxed{4}$ (30 点)

曲線 $y = \log(1 + \cos x)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ.

$\boxed{5}$ (30 点)

xy 平面において，2 点 B $\left(-\sqrt{3},\ -1\right)$，C $\left(\sqrt{3},\ -1\right)$ に対し，点 A は次の条件 $(*)$ を満たすとする.

$(*)$ $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ かつ点 A の y 座標は正.

次の各問に答えよ.

(1) $\triangle$ABC の外心の座標を求めよ.

(2) 点 A が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，$\triangle$ABC の垂心の軌跡を求めよ.

$\boxed{6}$ (40 点)

次の各問に答えよ.

問 1 n を 2 以上の整数とする．$3^n - 2^n$ が素数ならば n も素数であることを示せ.

問 2 a を 1 より大きい定数とする．微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a) = af(1)$ を満たすとき，曲線 $y = f(x)$ の接線で原点 $(0,\ 0)$ を通るものが存在することを示せ.

問題は，このページで終わりである。