

入学試験過去問題
数 学

京都大学（理系）

対象年度：2020年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

1

(30 点)

a, b は実数で, $a > 0$ とする. z に関する方程式

$$z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0 \quad (*)$$

は 3 つの相異なる解を持ち, それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする. このとき, a, b と (*) の 3 つの解を求めよ.

2

(30 点)

p を正の整数とする. α, β は x に関する方程式 $x^2 - 2px - 1 = 0$ の 2 つの解で, $|\alpha| > 1$ であるとする.

(1) すべての正の整数 n に対し, $\alpha^n + \beta^n$ は整数であり, さらに偶数であることを証明せよ.

(2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi)$ を求めよ.

3

(35 点)

k を正の実数とする. 座標空間において, 原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている.

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= \vec{OC} \cdot \vec{OD} = \frac{1}{2}, \\ \vec{OA} \cdot \vec{OC} &= \vec{OB} \cdot \vec{OC} = -\frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \vec{OA} \cdot \vec{OD} &= \vec{OB} \cdot \vec{OD} = k. \end{aligned}$$

このとき, k の値を求めよ. ただし, 座標空間の点 X, Y に対して, $\vec{OX} \cdot \vec{OY}$ は, \vec{OX} と \vec{OY} の内積を表す.

4

(35 点)

正の整数 a に対して,

$$a = 3^b c \quad (b, c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき, $B(a) = b$ と定める. 例えば, $B(3^2 \cdot 5) = 2$ である.

m, n は整数で, 次の条件を満たすとする.

(i) $1 \leq m \leq 30$.

(ii) $1 \leq n \leq 30$.

(iii) n は 3 で割り切れない.

このような (m, n) について

$$f(m, n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき,

$$A(m, n) = B(f(m, n))$$

の最大値を求めよ. また, $A(m, n)$ の最大値を与えるような (m, n) をすべて求めよ.

5

(35 点)

縦 4 個, 横 4 個のマス目のそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく. このマス目の横の並びを行といい, 縦の並びを列という. どの行にも, どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ. 下図はこのような入れ方の 1 例である.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

6

(35 点)

x, y, z を座標とする空間において, xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を z 軸のまわりに 1 回転させるとき, この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする. この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき, S が通過した部分よりなる立体を V とする. このとき, V の体積を求めよ.

問題は, このページで終わりである。

