

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：2017年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

w を 0 でない複素数, x, y を $w + \frac{1}{w} = x + yi$ を満たす実数とする.

- (1) 実数 R は $R > 1$ を満たす定数とする. w が絶対値 R の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ.
- (2) 実数 α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする. w が偏角 α の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ.

第 2 問

四面体 $OABC$ を考える. 点 D, E, F, G, H, I は, それぞれ辺 OA, AB, BC, CO, OB, AC 上にあり, 頂点ではないとする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) $\overrightarrow{DG}$ と $\overrightarrow{EF}$ が平行ならば $AE : EB = CF : FB$ であることを示せ.
- (2) D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているとき, これらの点は $OABC$ の各辺の中点であり, $OABC$ は正四面体であることを示せ.

第 3 問

p, q を自然数, α, β を

$$\tan \alpha = \frac{1}{p}, \quad \tan \beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする. このとき

$$\tan(\alpha + 2\beta) = 2$$

を満たす p, q の組 (p, q) をすべて求めよ.

第 4 問

$\triangle ABC$ は鋭角三角形であり、 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ であるとする。また $\triangle ABC$ の外接円の半径は 1 であるとする。

- (1) $\triangle ABC$ の内心を P とするとき、 $\angle BPC$ を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r の取りうる値の範囲を求めよ。

第 5 問

$a \geq 0$ とする. $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y = xe^{-x}$, 直線 $y = ax$, 直線 $x = \sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする. このとき, $S(a)$ の最小値を求めよ.
(ここで「囲まれた部分」とは, 上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする.)

第 6 問

n を自然数とする. n 個の箱すべてに, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている. 各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し, 取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る. このとき, X が 3 で割り切れる確率を求めよ.