

2016年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

(1) n を 2 以上の自然数とすると、関数

$$f_n(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin^{n-1} \theta$$

の $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n)^n$ を求めよ.

2

(30 点)

素数 p, q を用いて

$$p^q + q^p$$

と表される素数をすべて求めよ.

3

(35 点)

四面体 $OABC$ が次の条件を満たすならば、それは正四面体であることを示せ.

条件： 頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る.

ただし、四面体のある頂点の対面とは、その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう.

4

(35 点)

xyz 空間において, 平面 $y = z$ の中で

$$|x| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1, \quad 0 \leq y \leq \log a$$

で与えられる図形 D を考える. ただし a は 1 より大きい定数とする.

この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

5

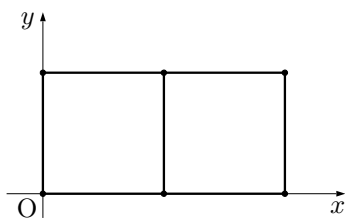
(35 点)

xy 平面上の 6 個の点 $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ が図のように長さ 1 の線分で結ばれている. 動点 X は, これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する.

規則: 動点 X は, そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに, 等しい確率で移動する.

例えば, X が $(2, 0)$ にいるときは, $(1, 0)$, $(2, 1)$ のいずれかに $\frac{1}{2}$ の確率で移動する. または X が $(1, 1)$ にいるときは, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$ のいずれかに $\frac{1}{3}$ の確率で移動する.

時刻 0 で動点 X が $O = (0, 0)$ から出発するとき, n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ. ただし n は 0 以上の整数とする.



複素数を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対し, 次の条件を考える.

(イ) $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる.

(ロ) $f(x)$ の係数 a, b の少なくとも一方は虚数である.

この 2 つの条件 (イ), (ロ) を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ.

問題は, このページで終わりである。

