

2015年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

2つの関数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$ と $y = \sin 2x$ のグラフの $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を、 x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ.

ただし、 $x = 0$ と $x = \frac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない.

2

(30 点)

次の2つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ.

- (a) 少なくとも2つの内角は 90° である.
- (b) 半径1の円が内接する. ただし、円が四角形に内接するとは、円が四角形の4つの辺すべてに接することをいう.

3

(35 点)

- (1) a を実数とするとき、 $(a, 0)$ を通り、 $y = e^x + 1$ に接する直線がただ1つ存在することを示せ.
- (2) $a_1 = 1$ として、 $n = 1, 2, \dots$ について、 $(a_n, 0)$ を通り、 $y = e^x + 1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする. このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$ を求めよ.

4

(35 点)

一辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において, P を辺 AB の中点とし, 点 Q が辺 AC 上を動くとする. このとき, $\cos \angle PDQ$ の最大値を求めよ.

5

(35 点)

a, b, c, d, e を正の実数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$g(x) = dx + e$$

を考える. すべての正の整数 n に対して $\frac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする. このとき, $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ.

6

(35 点)

2 つの関数を

$$f_0(x) = \frac{x}{2}, \quad f_1(x) = \frac{x+1}{2}$$

とおく. $x_0 = \frac{1}{2}$ から始め, 各 $n = 1, 2, \dots$ について, それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で $x_n = f_0(x_{n-1})$ または $x_n = f_1(x_{n-1})$ と定める. このとき, $x_n < \frac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ.

問題は, このページで終わりである。

