

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：2014年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

座標空間における次の 3 つの直線 l, m, n を考える：

l は点 $A(1, 0, -2)$ を通り、ベクトル $\vec{u} = (2, 1, -1)$ に平行な直線である．

m は点 $B(1, 2, -3)$ を通り、ベクトル $\vec{v} = (1, -1, 1)$ に平行な直線である．

n は点 $C(1, -1, 0)$ を通り、ベクトル $\vec{w} = (1, 2, 1)$ に平行な直線である．

P を l 上の点として、 P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする．このとき、 $PQ^2 + PR^2$ を最小にするような P と、そのときの $PQ^2 + PR^2$ を求めよ．

第 2 問

2つの粒子が時刻 0 において $\triangle ABC$ の頂点 A に位置している．これらの粒子は独立に運動し，それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする．たとえば，ある時刻で点 C にいる粒子は，その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する．この 2 つの粒子が，時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ．

第 3 問

$\triangle ABC$ は、条件 $\angle B = 2\angle A$, $BC = 1$ を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする．このとき、 $\cos \angle B$ を求めよ．

第 4 問

実数の定数 a, b に対して, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1}$$

で定める. すべての実数 x で不等式

$$f(x) \leq f(x)^3 - 2f(x)^2 + 2$$

が成り立つような点 (a, b) の範囲を図示せよ.

第 5 問

自然数 a, b はどちらも 3 で割り切れないが, $a^3 + b^3$ は 81 で割り切れる. このような a, b の組 (a, b) のうち, $a^2 + b^2$ を最小にするものと, そのときの $a^2 + b^2$ の値を求めよ.

第 6 問

双曲線 $y = \frac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と、原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を、それぞれ C_1, C_2 とする. C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A, B で交わり、点 A における C_1 の接線 l と線分 OA のなす角は $\frac{\pi}{6}$ であるとする. このとき、 C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ.