

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：2013年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

平行四辺形 $ABCD$ において、辺 AB を $1:1$ に内分する点を E 、辺 BC を $2:1$ に内分する点を F 、辺 CD を $3:1$ に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし、線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき、比 $AP:PQ$ を求めよ。

第 2 問

N を 2 以上の自然数とし, a_n ($n = 1, 2, \dots$) を次の性質 (i), (ii) をみたす数列とする.

(i) $a_1 = 2^N - 3,$

(ii) $n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$a_n \text{ が偶数のとき } a_{n+1} = \frac{a_n}{2}, \quad a_n \text{ が奇数のとき } a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2}.$$

このときどのような自然数 M に対しても

$$\sum_{n=1}^M a_n \leq 2^{N+1} - N - 5$$

が成り立つことを示せ.

第 3 問

n を自然数とし、整式 x^n を整式 $x^2 - 2x - 1$ で割った余りを $ax + b$ とする．このとき a と b は整数であり、さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ．

第 4 問

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ．ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい．

第 5 問

xy 平面内で、 y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1 : y = \sqrt{3} \log(1+x), \quad C_2 : y = \sqrt{3} \log(1-x)$$

とそれぞれ点 A , 点 B で接しているとする. さらに $\triangle PAB$ は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする. このとき 3 つの曲線 C , C_1 , C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ.

第 6 問

投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する．

- (1) 石が座標 x の点にあるとする．2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．
- (2) 石が原点にあるとする． n を自然数とし， $2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ．