2013年度入学試験問題

数　学　（理系）

200点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で6題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（30 点）

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1 : 1 に内分する点を E，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を F，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を G とする．線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP : PQ を求めよ．

2

（35 点）

N を 2 以上の自然数とし，a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を次の性質 (i)，(ii) をみたす数列とする．

(i) $a_1 = 2^N - 3$,

(ii) $n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$a_n \text{ が偶数のとき } a_{n+1} = \frac{a_n}{2},\ a_n \text{ が奇数のとき } a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2}.$$

このときどのような自然数 M に対しても

$$\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1} - N - 5$$

が成り立つことを示せ．

3

（35 点）

n を自然数とし，整式 x^n を整式 $x^2 - 2x - 1$ で割った余りを $ax + b$ とする．このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ．

4

（35 点）

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ．ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい．

5

（30 点）

xy 平面内で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1:\ y = \sqrt{3}\log(1+x), \quad C_2:\ y = \sqrt{3}\log(1-x)$$

とそれぞれ点 A，点 B で接しているとする．さらに △PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする．このとき 3 つの曲線 C，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

6

（35 点）

投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する．

(1) 石が座標 x の点にあるとする．2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．

(2) 石が原点にあるとする．n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ．

問題は，このページで終わりである。