

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：2012年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

次の各問に答えよ.

(1) a が正の実数のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.

(2) 定積分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1+x^2} dx$ の値を求めよ.

第 2 問

正四面体 $OABC$ において、点 P , Q , R をそれぞれ辺 OA , OB , OC 上にとる. ただし P , Q , R は四面体 $OABC$ の頂点とは異なるとする. $\triangle PQR$ が正三角形ならば、3 辺 PQ , QR , RP はそれぞれ 3 辺 AB , BC , CA に平行であることを証明せよ.

第 3 問

実数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

第 4 問

- (1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ.
- (2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で, $P(\sqrt[3]{2}) = 0$ を満たしているとする. このとき $P(x)$ は $x^3 - 2$ で割り切れることを証明せよ.

第 5 問

次の命題 (p) , (q) のそれぞれについて, 正しいかどうか答えよ. 正しいければ証明し, 正しくないければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ.

- (p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが 60° である三角形を作ることができるならば, n は 3 の倍数である.
- (q) $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ において, $AC < AD$ かつ $BC < BD$ ならば, $\angle C > \angle D$ である.

第 6 問

さいころを n 回投げて出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする. さらに

$$Y_1 = X_1, \quad Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \quad (k = 2, \dots, n)$$

によって $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ を定める.

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_n \leq 1+\sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ.