

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：2011 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：200 点

第 1 問

次の各問に答えよ.

- (1) 箱の中に, 1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている. ただし, 異なるカードには異なる番号が書かれているものとする. この箱から 2 枚のカードを同時に選び, 小さい方の数を X とする. これらのカードを箱に戻して, 再び 2 枚のカードを同時に選び, 小さい方の数を Y とする. $X = Y$ である確率を求めよ.

- (2) 定積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-2x^2} dx$ を求めよ.

第 2 問

a, b, c を実数とし, O を原点とする座標平面上において, 行列 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を T とする. この 1 次変換 T が 2 つの条件

- (i) 点 $(1, 2)$ を点 $(1, 2)$ に移す
- (ii) 点 $(1, 0)$ と点 $(0, 1)$ が T によって点 A, B にそれぞれ移るとき, $\triangle OAB$ の面積が $\frac{1}{2}$ である.

を満たすとき, a, b, c を求めよ.

第 3 問

xy 平面上で, $y = x$ のグラフと $y = \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ.

第 4 問

n は 2 以上の整数であり, $\frac{1}{2} < a_j < 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) であるとき, 不等式

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} \right)$$

が成立することを示せ.

第 5 問

xyz 空間で、原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$ を通る平面 α が共有点を持つことを示し、点 (x, y, z) がその共有点全体の集合を動くとき、積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ.

第 6 問

空間内に四面体 $ABCD$ を考える．このとき，4つの頂点 A, B, C, D を同時に通る球面が存在することを示せ．