

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系・乙）

対象年度：2010年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

四面体 ABCD において $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ はそれぞれ垂直であるとする. このとき, 頂点 A, 頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ.

第 2 問

x を正の実数とする．座標平面上の 3 点 $A(0, 1)$, $B(0, 2)$, $P(x, x)$ をとり， $\triangle APB$ を考える． x の値が変化するとき， $\angle APB$ の最大値を求めよ．

第 3 問

a を正の実数とする．座標平面において曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)，曲線 $y = a \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする．このとき $S : T = 3 : 1$ となるような a の値を求めよ．

第 4 問

$1 < a < 2$ とする. 3 辺の長さが $\sqrt{3}$, a , b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする. このとき a を用いて b を表せ.

第 5 問

次の問に答えよ.

- (1) n を正の整数, $a = 2^n$ とする. $3^a - 1$ は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ.
- (2) m を正の偶数とする. $3^m - 1$ が 2^m で割り切れるならば $m = 2$ または $m = 4$ であることを示せ.

第 6 問

n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる．各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする．どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする．このとき，極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_n}{n}$ を求めよ．