2010年度入学試験問題

数　　学　（理系乙）

200点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で6題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

(35 点)

四面体 ABCD において $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ はそれぞれ垂直であるとする．このとき，頂点 A，頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ．

2

(35 点)

x を正の実数とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$，$\mathrm{P}(x,\ x)$ をとり，$\triangle\mathrm{APB}$ を考える．x の値が変化するとき，$\angle\mathrm{APB}$ の最大値を求めよ．

3

(35 点)

a を正の実数とする．座標平面において曲線 $y = \sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y = \sin x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，曲線 $y = a\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする．このとき $S : T = 3 : 1$ となるような a の値を求めよ．

$\boxed{4}$ （35 点）

$1 < a < 2$ とする．3 辺の長さが $\sqrt{3}$，a，b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする．このとき a を用いて b を表せ．

$\boxed{5}$ （30 点）

次の問に答えよ．

(1) n を正の整数，$a = 2^n$ とする．$3^a - 1$ は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ．

(2) m を正の偶数とする．$3^m - 1$ が 2^m で割り切れるならば $m = 2$ または $m = 4$ であることを示せ．

$\boxed{6}$ （30 点）

n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる．各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする．どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log p_n}{n}$ を求めよ．

問題は，このページで終わりである。