

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系・乙）

対象年度：2007年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

以下の各問にそれぞれ答えよ.

問 1. 定積分 $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx$ を求めよ.

問 2. 1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき, 1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする. 15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか.

第 2 問

x, y を相異なる正の実数とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = xa_n + y^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の点 (x, y) の範囲を図示せよ．

第 3 問

p を 3 以上の素数とする. 4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a + b + c + d = 0, \quad ad - bc + p = 0, \quad a \geq b \geq c \geq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ.

第 4 問

点 O を中心とする円に内接する $\triangle ABC$ の 3 辺 AB , BC , CA をそれぞれ $2:3$ に内分する点を P , Q , R とする. $\triangle PQR$ の外心が点 O と一致するとき, $\triangle ABC$ はどのような三角形か.

第 5 問

A を 2 次の正方行列とする．列ベクトル $\vec{x_0}$ に対し，列ベクトル $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots$ を

$$\vec{x_{n+1}} = A\vec{x_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定める．ある零ベクトルではない $\vec{x_0}$ について，3 以上の自然数 m で初めて $\vec{x_m}$ が $\vec{x_0}$ と一致するとき，行列 A^m は単位行列であることを示せ．

第 6 問

すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ を満たし, さらに任意の実数 a, b に対して $1 + f(a)f(b) \neq 0$ であって

$$f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$$

を満たしている.

- (1) 任意の実数 a に対して, $-1 < f(a) < 1$ であることを証明せよ.
- (2) $y = f(x)$ のグラフは $x > 0$ で上に凸であることを証明せよ.