

2007年度入学試験問題

数 学 (理系乙)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

以下の各問にそれぞれ答えよ.

問 1. 定積分 $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx$ を求めよ.

問 2. 1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき, 1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする. 15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか.

2

(30 点)

x, y を相異なる正の実数とする. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = xa_n + y^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の点 (x, y) の範囲を図示せよ.

3

(35 点)

p を 3 以上の素数とする. 4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a + b + c + d = 0, \quad ad - bc + p = 0, \quad a \geq b \geq c \geq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ.

4

(35 点)

点 O を中心とする円に内接する $\triangle ABC$ の 3 辺 AB , BC , CA をそれぞれ $2:3$ に内分する点を P , Q , R とする. $\triangle PQR$ の外心が点 O と一致するとき, $\triangle ABC$ はどのような三角形か.

5

(35 点)

A を 2 次の正方行列とする. 列ベクトル $\vec{x}_0$ に対し, 列ベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ を

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定める. ある零ベクトルではない $\vec{x}_0$ について, 3 以上の自然数 m で初めて $\vec{x}_m$ が $\vec{x}_0$ と一致するとき, 行列 A^m は単位行列であることを示せ.

6

(35 点)

すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ を満たし, さらに任意の実数 a, b に対して $1 + f(a)f(b) \neq 0$ であって

$$f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$$

を満たしている.

- (1) 任意の実数 a に対して, $-1 < f(a) < 1$ であることを証明せよ.
- (2) $y = f(x)$ のグラフは $x > 0$ で上に凸であることを証明せよ.

問題は, このページで終わりである。

