

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：2004年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

$$f(\theta) = \cos 4\theta - 4 \sin^2 \theta$$

とする. $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ.

第 2 問

$\alpha > 0$ とし, $x > 0$ で定義された関数

$$f(x) = \left(\frac{e}{x^\alpha} - 1 \right) \frac{\log x}{x}$$

を考える. $y = f(x)$ のグラフより下側で x 軸より上側の部分の面積を α であらわせ.

ただし, e は自然対数の底である.

第 3 問

n を 2 以上の自然数とする. x^{2n} を $x^2 - x + \frac{n-1}{n^2}$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする.
すなわち, x の多項式 $P_n(x)$ があって

$$x^{2n} = P_n(x) \left(x^2 - x + \frac{n-1}{n^2} \right) + a_n x + b_n$$

が成り立っているとする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ.

第 4 問

行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

とする. 次の (*) が成り立つための実数 α, β についての必要十分条件を求めよ.

- (*) どんな 2 次正方行列 Y に対しても, 2 次正方行列 X で $AX - XB = Y$ となるものがある.

第 5 問

複素数 α に対してその共役複素数を $\bar{\alpha}$ であらわす. α を実数ではない複素数とする.
複素平面内の円 C が $1, -1, \alpha$ を通るならば, C は $-\frac{1}{\alpha}$ も通ることを示せ.

第 6 問

N を自然数とする. $N+1$ 個の箱があり, 1 から $N+1$ までの番号が付いている. どの箱にも玉が 1 個入っている. 番号 1 から N までの箱に入っている玉は白玉で, 番号 $N+1$ の箱に入っている玉は赤玉である. 次の操作 (*) を, おおのこの $k = 1, 2, \dots, N+1$ に対して, k が小さい方から順番に 1 回ずつ行う.

- (*) k 以外の番号の N 個の箱から 1 個の箱を選び, その箱の中身と番号 k の箱の中身を交換する. (ただし, N 個の箱から 1 個の箱を選ぶ事象は, どれも同様に確からしいとする.)

操作がすべて終了した後, 赤玉が番号 $N+1$ の箱に入っている確率を求めよ.