

2004年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

$$f(\theta) = \cos 4\theta - 4 \sin^2 \theta$$

とする. $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ.

2

(35 点)

$\alpha > 0$ とし, $x > 0$ で定義された関数

$$f(x) = \left(\frac{e}{x^\alpha} - 1 \right) \frac{\log x}{x}$$

を考える. $y = f(x)$ のグラフより下側で x 軸より上側の部分の面積を α であらわせ.

ただし, e は自然対数の底である.

3

(35 点)

n を 2 以上の自然数とする. x^{2n} を $x^2 - x + \frac{n-1}{n^2}$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする. すなわち, x の多項式 $P_n(x)$ があって

$$x^{2n} = P_n(x) \left(x^2 - x + \frac{n-1}{n^2} \right) + a_n x + b_n$$

が成り立っているとする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ.

4

(35 点)

行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

とする. 次の (*) が成り立つための実数 α, β についての必要十分条件を求めよ.

(*) どんな 2 次正方行列 Y に対しても, 2 次正方行列 X で $AX - XB = Y$ となるものがある.

5

(30 点)

複素数 α に対してその共役複素数を $\bar{\alpha}$ であらわす. α を実数ではない複素数とする. 複素平面内の円 C が $1, -1, \alpha$ を通るならば, C は $-\frac{1}{\alpha}$ も通ることを示せ.

6

(35 点)

N を自然数とする. $N + 1$ 個の箱があり, 1 から $N + 1$ までの番号が付いている. どの箱にも玉が 1 個入っている. 番号 1 から N までの箱に入っている玉は白玉で, 番号 $N + 1$ の箱に入っている玉は赤玉である. 次の操作 (*) を, おおのの $k = 1, 2, \dots, N + 1$ に対して, k が小さい方から順番に 1 回ずつ行う.

(*) k 以外の番号の N 個の箱から 1 個の箱を選び, その箱の中身と番号 k の箱の中身を交換する. (ただし, N 個の箱から 1 個の箱を選ぶ事象は, どれも同様に確からしいとする.)

操作がすべて終了した後, 赤玉が番号 $N + 1$ の箱に入っている確率を求めよ.

問題は、このページで終わりである。

