

# 入学試験過去問題

## 数 学

京都大学（理系）

対象年度：2002年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

## 第 1 問

数列  $\{a_n\}$  の初項  $a_1$  から第  $n$  項  $a_n$  までの和を  $S_n$  と表す. この数列が

$$a_1 = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1, \quad n(n-2)a_{n+1} = S_n \quad (n \geq 1)$$

を満たすとき, 一般項  $a_n$  を求めよ.

## 第 2 問

半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある.

- (1)  $AB^2 + BC^2 + CA^2 > 8$  ならば  $\triangle ABC$  は鋭角三角形であることを示せ.
- (2)  $AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 9$  が成立することを示せ. また, この等号が成立するのはどのような場合か.

### 第 3 問

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$  は整数を係数とする  $x$  の 4 次式とする. 4 次方程式  $f(x) = 0$  の重複も込めた 4 つの解のうち, 2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという. このとき  $a, b, c$  の値を求めよ.

## 第 4 問

- (1)  $x \geq 0$  で定義された関数  $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$  について、導関数  $f'(x)$  を求めよ.
- (2) 極方程式  $r = \theta$  ( $\theta \geq 0$ ) で定義される曲線の、 $0 \leq \theta \leq \pi$  の部分の長さを求めよ.

## 第 5 問

$a, b, c$  を実数とする.  $y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$  と  $y = c$  のグラフが相異なる 3 つの交点を持つという. このとき  $a^2 > b$  が成立することを示し, さらにこれらの交点の  $x$  座標は開区間  $(-a - 2\sqrt{a^2 - b}, -a + 2\sqrt{a^2 - b})$  に含まれていることを示せ.

## 第 6 問

$0 < \theta < 90$  とし,  $a$  は正の数とする. 複素数平面上の点  $z_0, z_1, z_2, \dots$  をつぎの条件 (i), (ii) を満たすように定める.

(i)  $z_0 = 0, z_1 = a$

(ii)  $n \geq 1$  のとき, 点  $z_n - z_{n-1}$  を原点のまわりに  $\theta^\circ$  回転すると点  $z_{n+1} - z_n$  に一致する.

このとき点  $z_n$  ( $n \geq 1$ ) が点  $z_0$  と一致するような  $n$  が存在するための必要十分条件は,  $\theta$  が有理数であることを示せ.