

2002年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す. この数列が

$$a_1 = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1, \quad n(n-2)a_{n+1} = S_n \quad (n \geq 1)$$

を満たすとき, 一般項 a_n を求めよ.

2

(35 点)

半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある.

- (1) $AB^2 + BC^2 + CA^2 > 8$ ならば $\triangle ABC$ は鋭角三角形であることを示せ.
- (2) $AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 9$ が成立することを示せ. また, この等号が成立するのはどのような場合か.

3

(30 点)

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする. 4 次方程式 $f(x) = 0$ の重複も込めた 4 つの解のうち, 2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという. このとき a, b, c の値を求めよ.

4

(35 点)

- (1) $x \geq 0$ で定義された関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ について, 導関数 $f'(x)$ を求めよ.
- (2) 極方程式 $r = \theta$ ($\theta \geq 0$) で定義される曲線の, $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分の長さを求めよ.

5

(35 点)

a, b, c を実数とする. $y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ と $y = c$ のグラフが相異なる 3 つの交点を持つという. このとき $a^2 > b$ が成立することを示し, さらにこれらの交点の x 座標は开区間 $(-a - 2\sqrt{a^2 - b}, -a + 2\sqrt{a^2 - b})$ に含まれていることを示せ.

6

(35 点)

$0 < \theta < 90$ とし, a は正の数とする. 複素数平面上の点 $z_0, z_1, z_2, \dots$ をつぎの条件 (i), (ii) を満たすように定める.

- (i) $z_0 = 0, z_1 = a$
- (ii) $n \geq 1$ のとき, 点 $z_n - z_{n-1}$ を原点のまわりに θ° 回転すると点 $z_{n+1} - z_n$ に一致する.

このとき点 z_n ($n \geq 1$) が点 z_0 と一致するような n が存在するための必要十分条件は, θ が有理数であることを示せ.

問題は, このページで終わりである。

