

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1999 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：200 点

第 1 問

放物線 $y = x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって, この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき, PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ.

第 2 問

平面上に 2 定点 A, B をとる. c は正の定数として, 平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}| + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = c$$

を満たすとき, 点 P の軌跡を求めよ.

第 3 問

- (1) $a_0 < b_0$, $a_1 < b_1$ を満たす正の実数 a_0 , b_0 , a_1 , b_1 について, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{b_1^2}{a_0^2 + 1} + \frac{a_1^2}{b_0^2 + 1} > \frac{a_1^2}{a_0^2 + 1} + \frac{b_1^2}{b_0^2 + 1}$$

- (2) n 個の自然数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ は互いに相異なり, $1 \leq x_k \leq n$ ($1 \leq k \leq n$) を満たしているとする. このとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2 + 1} > n - \frac{8}{5}$$

第 4 問

複素平面上で, $\triangle ABC$ の頂点を表す複素数を α, β, γ とする. α, β, γ が次の 3 条件を満たすとする.

1. $\triangle ABC$ は辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形である.
2. $\alpha + \beta + \gamma = 3$.
3. $\alpha\beta\gamma$ は絶対値 1 で, 虚数部分は正.

このとき, 次の問に答えよ.

- (1) $z = \alpha - 1$ において, β と γ を z を使って表せ.
- (2) α, β, γ の偏角を求めよ. ただし $0^\circ \leq \arg \alpha \leq \arg \beta \leq \arg \gamma < 360^\circ$ とする.

第 5 問

以下の問に答えよ．ただし $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ が無理数であることは使ってよい．

- (1) 有理数 p , q , r について, $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} = 0$ ならば, $p = q = r = 0$ であることを示せ.
- (2) 実数係数の 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ について, $f(1)$, $f(1 + \sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であることを示せ.

第 6 問

x, y は t を媒介変数として, 次のように表示されているものとする.

$$x = \frac{3t - t^2}{t + 1}$$

$$y = \frac{3t^2 - t^3}{t + 1}$$

変数 t が $0 \leq t \leq 3$ を動くとき, x と y の動く範囲をそれぞれ求めよ. さらに, この (x, y) が描くグラフが囲む図形と領域 $y \geq x$ の共通部分の面積を求めよ.