1999年度入学試験問題

数　学　（理系）

200点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で6題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（30 点）

放物線 $y = x^2$ の上を動く 2 点 P，Q があって，この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき，PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ．

2

（30 点）

平面上に 2 定点 A，B をとる．c は正の定数として，平面上の点 P が

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right| + \overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = c$$

を満たすとき，点 P の軌跡を求めよ．

3

（35 点）

(1) $a_0 < b_0$，$a_1 < b_1$ を満たす正の実数 a_0，b_0，a_1，b_1 について，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{{b_1}^2}{{a_0}^2+1} + \frac{{a_1}^2}{{b_0}^2+1} > \frac{{a_1}^2}{{a_0}^2+1} + \frac{{b_1}^2}{{b_0}^2+1}$$

(2) n 個の自然数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は互いに相異なり，$1 \leqq x_k \leqq n$（$1 \leqq k \leqq n$）を満たしているとする．このとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{x_k}^2}{k^2+1} > n - \frac{8}{5}$$

4

（35 点）

複素平面上で，△ABC の頂点を表す複素数を α，β，γ とする．α，β，γ が次の 3 条件を満たすとする．

1. △ABC は辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形である．
2. $\alpha+\beta+\gamma=3$.
3. $\alpha\beta\gamma$ は絶対値 1 で，虚数部分は正.

このとき，次の問に答えよ．

(1) $z=\alpha-1$ とおいて，β と γ を z を使って表せ.

(2) α，β，γ の偏角を求めよ．ただし $0^\circ \leqq \arg\alpha \leqq \arg\beta \leqq \arg\gamma < 360^\circ$ とする．

5

（35 点）

以下の問に答えよ．ただし $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$ が無理数であることは使ってよい.

(1) 有理数 p，q，r について，$p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$ ならば，$p=q=r=0$ であることを示せ.

(2) 実数係数の 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ について，$f(1)$，$f(1+\sqrt{2})$，$f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であることを示せ.

6

（35 点）

x，y は t を媒介変数として，次のように表示されているものとする．

$$x=\frac{3t-t^2}{t+1}$$

$$y=\frac{3t^2-t^3}{t+1}$$

変数 t が $0 \leqq t \leqq 3$ を動くとき，x と y の動く範囲をそれぞれ求めよ．さらに，この $(x,\ y)$ が描くグラフが囲む図形と領域 $y \geqq x$ の共通部分の面積を求めよ.

問題は，このページで終わりである。