

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1998年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

直角三角形に半径 r の円が内接していて、三角形の 3 辺の長さの和と円の直径との和が 2 となっている。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) この三角形の斜辺の長さを r で表せ。
- (2) r の値が問題の条件を満たしながら変化するとき、この三角形の面積の最大値を求めよ。

第 2 問

$f(x) = x^2 + 7$ とおく.

- (1) n は 3 以上の自然数で, ある自然数 a に対して $f(a)$ が 2^n の倍数になっているとする. このとき $f(a)$ と $f(a + 2^{n-1})$ のうち少なくとも一方は 2^{n+1} の倍数であることを示せ.
- (2) 任意の自然数 n に対して $f(a_n)$ が 2^n の倍数となるような自然数 a_n が存在することを示せ.

第 3 問

四面体 $OABC$ の辺 OA 上に点 P , 辺 AB 上に点 Q , 辺 BC 上に点 R , 辺 CO 上に点 S をとる. これらの 4 点をこの順序で結んで得られる図形が平行四辺形となるとき, この平行四辺形 $PQRS$ の 2 つの対角線の交点は, 2 つの線分 AC と OB のそれぞれの中点を結ぶ線分上にあることを示せ.

第 4 問

a, m は自然数で a は定数とする. xy 平面上の点 (a, m) を頂点とし, 原点と点 $(2a, 0)$ を通る放物線を考える. この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積を S_m , この領域の内部および境界線上にある格子点の数を L_m とする. このとき極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L_m}{S_m}$ を求めよ. ただし xy 平面上の格子点とは, その点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである.

第 5 問

袋の中に青色，赤色，白色の形の同じ玉がそれぞれ 3 個ずつ入っている．各色の 3 個の玉にはそれぞれ 1, 2, 3 の番号がついている．これら 9 個の玉をよくかきまぜて袋から同時に 3 個の玉を取り出す．取り出した 3 個のうちに同色のものが他になく，同番号のものも他にない玉の個数を得点とする．たとえば，青 1 番，赤 1 番，白 3 番を取り出したときの得点は 1 で，青 2 番，赤 2 番，赤 3 番を取り出したときの得点は 0 である．このとき，以下の問に答えよ．

- (1) 得点が n になるような取り出し方の数を $A(n)$ とするとき， $A(0)$ ， $A(1)$ ， $A(2)$ ， $A(3)$ を求めよ．
- (2) 得点の期待値を求めよ．

第 6 問

a を $0 < a < 1$ を満たす定数として、曲線 $y = \log(x - a)$ と x 軸と 2 直線 $x = 1$, $x = 3$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(a)$ とする.

(1) $V(a)$ を求めよ.

(2) a の値が $0 < a < 1$ の範囲で変化するとき, $V(a)$ の最小値を求めよ.