

1998年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

直角三角形に半径 r の円が内接していて、三角形の 3 辺の長さの和と円の直径との和が 2 となっている。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) この三角形の斜辺の長さを r で表せ。
- (2) r の値が問題の条件を満たしながら変化するとき、この三角形の面積の最大値を求めよ。

2

(30 点)

$f(x) = x^2 + 7$ とおく。

- (1) n は 3 以上の自然数で、ある自然数 a に対して $f(a)$ が 2^n の倍数になっているとする。このとき $f(a)$ と $f(a + 2^{n-1})$ のうち少なくとも一方は 2^{n+1} の倍数であることを示せ。
- (2) 任意の自然数 n に対して $f(a_n)$ が 2^n の倍数となるような自然数 a_n が存在することを示せ。

3

(35 点)

四面体 $OABC$ の辺 OA 上に点 P 、辺 AB 上に点 Q 、辺 BC 上に点 R 、辺 CO 上に点 S をとる。これらの 4 点をこの順序で結んで得られる図形が平行四辺形となるとき、この平行四辺形 $PQRS$ の 2 つの対角線の交点は、2 つの線分 AC と OB のそれぞれの中点を結ぶ線分上にあることを示せ。

4

(35 点)

a, m は自然数で a は定数とする. xy 平面上の点 (a, m) を頂点とし, 原点と点 $(2a, 0)$ を通る放物線を考える. この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積を S_m , この領域の内部および境界線上にある格子点の数を L_m とする. このとき極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L_m}{S_m}$ を求めよ. ただし xy 平面上の格子点とは, その点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである.

5

(35 点)

袋の中に青色, 赤色, 白色の形の同じ玉がそれぞれ 3 個ずつ入っている. 各色の 3 個の玉にはそれぞれ 1, 2, 3 の番号がついている. これら 9 個の玉をよくかきまぜて袋から同時に 3 個の玉を取り出す. 取り出した 3 個のうちに同色のものが他になく, 同番号のものも他にない玉の個数を得点とする. たとえば, 青 1 番, 赤 1 番, 白 3 番を取り出したときの得点は 1 で, 青 2 番, 赤 2 番, 赤 3 番を取り出したときの得点は 0 である. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 得点が n になるような取り出し方の数を $A(n)$ とするとき, $A(0), A(1), A(2), A(3)$ を求めよ.
- (2) 得点の期待値を求めよ.

6

(35 点)

a を $0 < a < 1$ を満たす定数として, 曲線 $y = \log(x - a)$ と x 軸と 2 直線 $x = 1, x = 3$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(a)$ とする.

- (1) $V(a)$ を求めよ.
- (2) a の値が $0 < a < 1$ の範囲で変化するとき, $V(a)$ の最小値を求めよ.

問題は, このページで終わりである。

