

1997年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

単位円 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上の点 P をとり, 定点 $A(-2, 0)$ から P へ線分を引き, その線分の P の側の延長線上に点 Q を $AP \cdot PQ = 3$ となるようにとる. ただし, AP は線分 AP の長さを表す.

- (1) $s = AP$, $t = OQ$ において, t を s で表せ. ただし, $O(0, 0)$ は原点である.
- (2) 点 P が円 C 上を動くとき, 点 Q の描く軌跡を求めよ.

2

(30 点)

n が相異なる素数 p, q の積, $n = pq$, であるとき, $(n-1)$ 個の数 ${}_nC_k$ ($1 \leq k \leq n-1$) の最大公約数は 1 であることを示せ.

3

(35 点)

2 つの放物線 $y = x^2 + 1$ と $y = kx^2$ ($k > 1$) で囲まれた部分の面積が第 1 の放物線上の点 $P(a, a^2 + 1)$ における接線 L によって 2 等分されている (すなわち, L の上側にある部分の面積と下側にある部分の面積が等しい).

- (1) a^2 を k で表せ.
- (2) $\lim_{k \rightarrow \infty} a^2$ を求めよ.

4

(35 点)

- (1) $0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ であるとき, 次の不等式を示せ.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin x \, dx + \int_{\pi-\beta}^{\pi-\alpha} \sin x \, dx > (\beta - \alpha)(\sin \alpha + \sin(\pi - \beta))$$

- (2) $\sum_{k=1}^7 \sin \frac{k\pi}{8} < \frac{16}{\pi}$ を示せ.

箱の中に 1 と書かれたカードと 3 と書かれたカードが合計 N 枚入れている。1 回の試行で、箱の中からでたらめに 1 枚のカードを取り出し、その数字を見た上で、箱の中に戻す。

A, B の 2 人がそれぞれ試行を 2 回または 3 回行って、その間に取り出したカードに書かれている数の合計が大きい方を勝ちとするゲームを行う。ただし、1 人が 3 回の試行を行って、取り出した数の合計が 7 または 9 の場合には、その人の得点は 0 とする規則である。

そこで A, B はそれぞれ次の作戦でゲームを行うことにした。

A : 2 回目までの合計が 2 のときは 3 回目を行い、4 または 6 のときは 3 回目を行わない。

B : 2 回目までの合計が 2 または 4 のときは 3 回目を行い、6 のときは 3 回目を行わない。

1 と書かれたカードの枚数を n ($0 < n < N$) とし、 $p = \frac{n}{N}$ とする。

- (1) A の得点の期待値 E_A , B の得点の期待値 E_B をそれぞれ p で表せ。また、 $E_A > E_B$ となるための p の条件を求めよ。
- (2) A の勝つ確率を P_A , B の勝つ確率を P_B とするとき、「 $E_A > E_B$ ならば $P_A > P_B$ 」といえるか。

曲線 $y = \cos x$ の $x = t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) における接線と x 軸, y 軸の囲む 3 角形の面積を $S(t)$ とする。

- (1) t の関数として、 $S(t)$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) を求めよ。
- (2) $S(t)$ はある 1 点 $t = t_0$ で最小値をとることを示せ。また、 $\frac{\pi}{4} < t_0 < 1$ を示せ。
- (3) $S(t_0) = 2t_0 \cos t_0$ を示せ。また、 $S(t_0) > \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ を示せ。

問題は、このページで終わりである。

