

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1996 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：200 点

第 1 問

xy 平面の原点 O を中心とし半径 1 の円 C 上に定点 A をとる. 同じ円上の点 X に対し, 平面上の点 Y を

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} - 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX})\overrightarrow{OX}$$

で定める. ただし, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OX}$ の内積である. このとき,

- (1) $|\overrightarrow{OY}| = 1$ であることを示せ.
- (2) $\overrightarrow{OY} = -\overrightarrow{OA}$ となる点 X をすべて求めよ.
- (3) 点 X が円 C を 1 回まわるとき, 点 Y は同じ円を 2 回まわることを示せ.

第 2 問

xyz 空間の 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ と, $z = 0$ で表される平面上の直線 $l: x + y = 0$ の上を動く点 $P(t, -t, 0)$ を考える. 点 A を通り, 直線 l に垂直な平面を α とする. $t > \frac{1}{2}$ のとき, 4 面体 $ABCP$ と平面 α が交わってできる図形の面積 $S(t)$ の最大値を求めよ.

第 3 問

平面上の 1 次変換 f に対し, $f(\vec{v}) \neq \vec{v}$ かつ $f^3(\vec{v}) = \vec{v}$ となるベクトル $\vec{v}$ が存在するならば, f^3 は恒等変換であることを示せ. ただし $f^3 = f \circ (f \circ f)$ である.

第 4 問

与えられた自然数 k に対し、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_n = \left[\frac{a_{n-1} + k}{3} \right] \quad (n \geq 2)$$

によって定める。ただし実数 t に対し $[t]$ は t を超えない最大の整数を表す。

(1) $k = 8$ および $k = 9$ のとき、数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) すべての自然数 n に対し、次の 2 つの不等式

$$a_n \leq \frac{k-1}{2}, \quad a_n \leq a_{n+1}$$

が成り立つことを示せ。

(3) $a_n = a_{n+1}$ ならば、 n 以上のすべての整数 m に対し $a_n = a_m$ であることを示し、このときの a_n の値を求めよ。

第 5 問

xy 平面上の正三角形 $\triangle ABC$ を考える． $\triangle ABC$ の重心は原点 O にあり，ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の長さは 1 とする． $\triangle ABC$ の内部または辺上の点 P_0 に対し，3 頂点 A, B, C から 1 点を等確率 $\frac{1}{3}$ で選び，この頂点と P_0 の中点を P_1 とする．次に点 P_1 に対して同様の操作を行い得られた点を P_2 とし，以下この操作を繰り返して，点 $P_3, P_4, \dots, P_n$ を作る．ベクトル $\overrightarrow{OP_n}$ の長さの 2 乗 $|\overrightarrow{OP_n}|^2$ の期待値を E_n とおく．

- (1) E_1 をベクトル $\overrightarrow{OP_0}$ の長さをを用いて表せ．
- (2) 選んだ頂点が $X_1, X_2, \dots, X_n$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{OP_n}$ をベクトル $\overrightarrow{OP_0}$ と $\overrightarrow{OX_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, を用いて表せ．
- (3) P_0 が原点 O のとき， E_n を求めよ．

第 6 問

ガソリンを x kg 積んだ状態で時速 v km で走るとき、毎時 $\frac{100+x}{100}e^{kv}$ kg のガソリンを消費する車がある。ここで k は正の定数である。この車を用いて 100 km 離れた地点へ一定速度で行くとき、ガソリンの消費量を最小にするには、最初に積むガソリンの量と走行速度をどのようにすればよいか。ただし、ガソリンが無くなれば車は直ちに停止するものとする。