

1996年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

xy 平面の原点 O を中心とし半径 1 の円 C 上に定点 A をとる. 同じ円上の点 X に対し, 平面上の点 Y を

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} - 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX})\overrightarrow{OX}$$

で定める. ただし, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OX}$ の内積である. このとき,

(1) $|\overrightarrow{OY}| = 1$ であることを示せ.

(2) $\overrightarrow{OY} = -\overrightarrow{OA}$ となる点 X をすべて求めよ.

(3) 点 X が円 C を 1 回まわるとき, 点 Y は同じ円を 2 回まわることを示せ.

2

(30 点)

xyz 空間の 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ と, $z = 0$ で表される平面上の直線 $l: x + y = 0$ の上を動く点 $P(t, -t, 0)$ を考える. 点 A を通り, 直線 l に垂直な平面を α とする. $t > \frac{1}{2}$ のとき, 4 面体 $ABCP$ と平面 α が交わってできる図形の面積 $S(t)$ の最大値を求めよ.

3

(35 点)

平面上の 1 次変換 f に対し, $f(\vec{v}) \neq \vec{v}$ かつ $f^3(\vec{v}) = \vec{v}$ となるベクトル $\vec{v}$ が存在するならば, f^3 は恒等変換であることを示せ. ただし $f^3 = f \circ (f \circ f)$ である.

4

(35 点)

与えられた自然数 k に対し, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_n = \left[\frac{a_{n-1} + k}{3} \right] \quad (n \geq 2)$$

によって定める. ただし実数 t に対し $[t]$ は t を超えない最大の整数を表す.

(1) $k = 8$ および $k = 9$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ を求めよ.

(2) すべての自然数 n に対し, 次の 2 つの不等式

$$a_n \leq \frac{k-1}{2}, \quad a_n \leq a_{n+1}$$

が成り立つことを示せ.

(3) $a_n = a_{n+1}$ ならば, n 以上のすべての整数 m に対し $a_n = a_m$ であることを示し, このときの a_n の値を求めよ.

5

(35 点)

xy 平面上の正三角形 $\triangle ABC$ を考える. $\triangle ABC$ の重心は原点 O にあり, ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の長さは 1 とする. $\triangle ABC$ の内部または辺上の点 P_0 に対し, 3 頂点 A, B, C から 1 点を等確率 $\frac{1}{3}$ で選び, この頂点と P_0 の中点を P_1 とする. 次に点 P_1 に対して同様の操作を行い得られた点を P_2 とし, 以下この操作を繰り返して, 点 $P_3, P_4, \dots, P_n$ を作る. ベクトル $\overrightarrow{OP_n}$ の長さの 2 乗 $|\overrightarrow{OP_n}|^2$ の期待値を E_n とおく.

(1) E_1 をベクトル $\overrightarrow{OP_0}$ の長さをを用いて表せ.

(2) 選んだ頂点が $X_1, X_2, \dots, X_n$ のとき, ベクトル $\overrightarrow{OP_n}$ をベクトル $\overrightarrow{OP_0}$ と $\overrightarrow{OX_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, を用いて表せ.

(3) P_0 が原点 O のとき, E_n を求めよ.

ガソリンを x kg 積んだ状態で時速 v km で走るとき、毎時 $\frac{100+x}{100}e^{kv}$ kg のガソリンを消費する車がある。ここで k は正の定数である。この車を用いて 100 km 離れた地点へ一定速度で行くとき、ガソリンの消費量を最小にするには、最初に積むガソリンの量と走行速度をどのようにすればよいか。ただし、ガソリンが無くなれば車は直ちに停止するものとする。

問題は、このページで終わりである。

