

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1995 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：200 点

第 1 問

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とする. 平面上の 1 点を P , 原点を O とする.
 $\overrightarrow{OP}$ の f による像を $\overrightarrow{OQ}$, x 軸に垂直で点 Q を通る直線と x 軸との交点を R とする. 点 P が O に一致しない範囲を動くとき, $\frac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OP}|}$ の最大値が 2, $\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}|}$ の最大値と最小値の比が 3 となるように a, b の値を定めよ.

第 2 問

a, b は $a > b$ をみたす自然数とし, p, d は素数で $p > 2$ とする. このとき, $a^p - b^p = d$ であるならば, d を $2p$ で割った余りが 1 であることを示せ.

第 3 問

xy 平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = x^3, \quad C_2 : y = ax^2 + bx + c$$

が相異なる 3 点で交わり, かつそれらの点で C_1 に接する 3 直線が 1 点 $P(p, q)$ で交わる
とする. このとき,

(1) $a = \frac{3}{2}p, \quad b = 0, \quad c = -\frac{1}{2}q$ であることを示せ.

(2) p, q のみたす条件を求めよ.

第 4 問

x と y の 2 文字からなる文字列 z_n を次の規則 (イ), (ロ) で順次定めていく.

(イ) $z_1 = x$ とおく.

(ロ) z_n の中に現れるすべての x を yx で, すべての y を xx で置き換えてできる文字列を z_{n+1} とする ($n = 1, 2, 3, \dots$).

例えば $z_2 = yx$, $z_3 = xxyx$, $z_4 = yxyxxxyx$ である. 2 次の正方行列 A, B に対して, z_n 中の x を A で, y を B で置き換え, 行列の積をつくってできる行列を C_n とする. 例えば, $C_1 = A$, $C_2 = BA$, $C_3 = AABA$ (行列の積) である.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $n \geq 3$ ならば $C_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示せ.

第 5 問

1 番から 7 番まで番号のついた席が番号順に一列に並んでいる．客が順に到着して次のように着席していくとする．

- (イ) 両端の席および先客が着席している隣の席に次の客が着席する確率は、すべて等しい．
- (ロ) 両隣が空席の席に着席する確率は、隣の席にすでに先客が着席している席または端の席に着席する確率に比べて 2 倍である．

このとき、

- (1) 3 人目の客が到着したときに、すでに 1 番と 3 番の席に先客が着席している確率を求めよ．
- (2) 4 人目の客が到着したときに、すでに 2 番、4 番、6 番の席に先客が着席している確率を求めよ．

第 6 問

深さ h の容器がある．底は半径 a (> 0) の円板，側面は $x = f(y)$, $0 \leq y \leq h$ のグラフを y 軸のまわりに回転したものである．ただし $f(y)$ は正の連続関数で $f(0) = a$ とする．この容器に単位時間当り V (一定) の割合で水を入れたとき， T 時間後に一杯になり，しかも t ($< T$) 時間後の水面の面積は $Vt + \pi a^2$ であった．関数 $f(y)$ を決定し， T を求めよ．