

1995年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とする. 平面上の 1 点を P , 原点を O とする. $\overrightarrow{OP}$ の f による像を $\overrightarrow{OQ}$, x 軸に垂直で点 Q を通る直線と x 軸との交点を R とする. 点 P が O に一致しない範囲を動くとき, $\frac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OP}|}$ の最大値が 2, $\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}|}$ の最大値と最小値の比が 3 となるように a, b の値を定めよ.

2

(30 点)

a, b は $a > b$ をみたす自然数とし, p, d は素数で $p > 2$ とする. このとき, $a^p - b^p = d$ であるならば, d を $2p$ で割った余りが 1 であることを示せ.

3

(35 点)

xy 平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = x^3, \quad C_2 : y = ax^2 + bx + c$$

が相異なる 3 点で交わり, かつそれらの点で C_1 に接する 3 直線が 1 点 $P(p, q)$ で交わるとする. このとき,

(1) $a = \frac{3}{2}p, b = 0, c = -\frac{1}{2}q$ であることを示せ.

(2) p, q のみたす条件を求めよ.

4

(35 点)

x と y の 2 文字からなる文字列 z_n を次の規則 (イ), (ロ) で順次定めていく.

(イ) $z_1 = x$ とおく.

(ロ) z_n の中に現れるすべての x を yx で, すべての y を xx で置き換えてできる文字列を z_{n+1} とする ($n = 1, 2, 3, \dots$).

例えば $z_2 = yx$, $z_3 = xxyx$, $z_4 = yxyxxxyx$ である. 2 次の正方行列 A, B に対して, z_n の中の x を A で, y を B で置き換え, 行列の積をつくってできる行列を C_n とする. 例えば, $C_1 = A$, $C_2 = BA$, $C_3 = AABA$ (行列の積) である.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $n \geq 3$ ならば $C_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示せ.

5

(35 点)

1 番から 7 番まで番号のついた席が番号順に一列に並んでいる. 客が順に到着して次のように着席していくとする.

(イ) 両端の席および先客が着席している隣の席に次の客が着席する確率は, すべて等しい.

(ロ) 両隣が空席の席に着席する確率は, 隣の席にすでに先客が着席している席または端の席に着席する確率に比べて 2 倍である.

このとき,

(1) 3 人目の客が到着したときに, すでに 1 番と 3 番の席に先客が着席している確率を求めよ.

(2) 4 人目の客が到着したときに, すでに 2 番, 4 番, 6 番の席に先客が着席している確率を求めよ.

深さ h の容器がある．底は半径 a (> 0) の円板，側面は $x = f(y)$, $0 \leq y \leq h$ のグラフを y 軸のまわりに回転したものである．ただし $f(y)$ は正の連続関数で $f(0) = a$ とする．この容器に単位時間当り V (一定) の割合で水を入れたとき， T 時間後に一杯になり，しかも t ($< T$) 時間後の水面の面積は $Vt + \pi a^2$ であった．関数 $f(y)$ を決定し， T を求めよ．

問題は，このページで終わりである。

