

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1994年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

A, B, C, E は 2 行 2 列の行列で, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

- (1) $AB = BA$ ならば $B = pA + qE$ となる実数 p, q が存在することを示せ.
- (2) $AB = BA$, $AC = CA$ が成り立つならば, $BC = CB$ が成り立つことを示せ.
- (3) $AB = BA$, $B^2 = E$ を満たす行列 B をすべて求めよ.

第 2 問

n は 0 または正の整数とする. a_n を, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ によって定める. a_n を 3 で割った余りを b_n とし, $c_n = b_0 + \cdots + b_n$ とおく.

- (1) $b_0, \dots, b_9$ を求めよ.
- (2) $c_{n+8} = c_n + c_7$ であることを示せ.
- (3) $n + 1 \leq c_n \leq \frac{3}{2}(n + 1)$ が成り立つことを示せ.

第 3 問

正 4 面体の 4 つの頂点を A, B, C, D とする. s, t を $0 < s < 1, 0 < t < 1$ を満たす実数とし,

- 線分 AB を $s : 1 - s$ に内分する点を E ,
- 線分 AC を $t : 1 - t$ に内分する点を F ,
- 線分 AD を $t : 1 - t$ に内分する点を G

とおく. 3 点 E, F, G を通る平面が, 3 点 B, C, D を通る円と共有点を持つために s, t の満たすべき条件を求め, 点 (s, t) の範囲を平面上に図示せよ.

第 4 問

xy 平面上で, 3 点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $P(t, 2t^2 + 1)$ を考え, $\angle APB$ の 2 等分線と x 軸との交点を Q とする. t がすべての実数値を動くとき, $\frac{QB}{AQ}$ の最大値, 最小値を求めよ.

第 5 問

A, B, C の 3 人が色のついた札を 1 枚ずつ持っている. はじめに, A, B, C の持っている札の色はそれぞれ赤, 白, 青である. A がさいころを投げて, 3 の倍数の目が出たら A は B と持っている札を交換し, その他の目が出たら A は C と札を交換する. この試行を n 回繰り返した後に, 赤い札を A, B, C が持っている確率を, それぞれ a_n, b_n, c_n とする.

(1) $n \geq 2$ のとき, a_n, b_n, c_n を $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ で表せ.

(2) a_n を求めよ.

第 6 問

θ が 0 から 2π まで変化するとき, 点 $P(\theta) = (2 \cos \theta - \cos 2\theta, 2 \sin \theta - \sin 2\theta)$ の描く曲線を考える.

- (1) この曲線の全長 L を求めよ.
- (2) この曲線の $0 \leq \theta \leq \theta_n$ の部分の長さが $\frac{L}{n}$ となるように θ_n を定めるとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \theta_n$ を求めよ.