

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1993年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

$p > 0$ とする. 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ に点 $P(0, p)$ から 2 本の接線を引いて, それぞれの接点を A, B とするとき, $\triangle PAB$ の面積を最小にするような p の値を求めよ.

第 2 問

点 O を中心とする半径 1 の円 C に含まれる 2 つの円 C_1, C_2 を考える. ただし C_1, C_2 の中心は C の直径 AB 上にあり, C_1 は点 A で, また C_2 は点 B でそれぞれ C と接している. また C_1, C_2 の半径をそれぞれ a, b とする. C 上の点 P から C_1, C_2 に 1 本ずつ接線を引き, それらの接点を Q, R とする.

- (1) $\angle POA = \theta$ とするとき, PQ は θ によってどのように表せるか.
- (2) P を C 上で動かしたときの $PQ + PR$ の最大値を求めよ.

第 3 問

$f(x)$ は x の整式, c は定数とする. 等式 $\int_x^{x+1} f(t) dt = cf(x)$ がすべての x で成り立つならば, $f(x)$ は定数であることを示せ.

第 4 問

自然数 n に対して,

$$a_n = \int_0^1 (1+x)^{-n-1} e^{x^2} dx$$

$$b_n = \int_0^1 (1+x)^{-n} x e^{x^2} dx$$

とおく.

- (1) $b_n \leq e \cdot \int_0^1 (1+x)^{-n} dx$ が成り立つことを示し, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ を求めよ.

第 5 問

n を自然数とする. さいころを $2n$ 回投げて n 回以上偶数の目が出る確率を p_n とするとき, $p_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$ であることを示せ.

第 6 問

f, g をそれぞれ行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換とする. 以下では一般に, 1 次変換 a, b の合成 $b \circ a$ を簡単に ba と記す. また, aa を a^2 , aaa を a^3 と書く.

- (1) $f^2 = g^2 = (gf)^3 = i$ を示せ. ただし, i は恒等変換, すなわち任意の点をそれ自身に移す変換である.
- (2) 変換 $f, gf, fgf, fgfg, fgfgf$ は, 変換 $g, fg, gfg, fgfg, fgfgg$ をある順序に並べ替えたものである. 後者の 5 つの変換はそれぞれ前者の 5 つのどれと等しいか.
- (3) 3 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を頂点とする三角形を Δ とする. Δ を f, g で繰り返し変換して得られるすべての三角形の和集合を図示せよ.