1993年度入学試験問題

数　学　（理系）

200点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページがある．
3. 問題は全部で6題ある．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと．それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない．ただし，解答用ページに続き方をはっきり示した場合は，見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．なお，他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること．
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．なお，計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き，計算などは，消さずに残しておいてもよい．
7. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

（30 点）

$p > 0$ とする．双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ に点 $\mathrm{P}\,(0,\ p)$ から 2 本の接線を引いて，それぞれの接点を A，B とするとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を最小にするような p の値を求めよ．

2

（30 点）

点 O を中心とする半径 1 の円 C に含まれる 2 つの円 C_1，C_2 を考える．ただし C_1，C_2 の中心は C の直径 AB 上にあり，C_1 は点 A で，また C_2 は点 B でそれぞれ C と接している．また C_1，C_2 の半径をそれぞれ a，b とする．C 上の点 P から C_1，C_2 に 1 本ずつ接線を引き，それらの接点を Q，R とする．

(1) $\angle\mathrm{POA} = \theta$ とするとき，PQ は θ によってどのように表せるか．

(2) P を C 上で動かしたときの $\mathrm{PQ} + \mathrm{PR}$ の最大値を求めよ．

3

（35 点）

$f(x)$ は x の整式，c は定数とする．等式 $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt = cf(x)$ がすべての x で成り立つならば，$f(x)$ は定数であることを示せ．

4

（35 点）

自然数 n に対して，

$$a_n = \int_0^1 (1+x)^{-n-1} e^{x^2}\,dx$$

$$b_n = \int_0^1 (1+x)^{-n} x e^{x^2}\,dx$$

とおく．

(1) $b_n \leqq e \cdot \displaystyle\int_0^1 (1+x)^{-n}\,dx$ が成り立つことを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n a_n$ を求めよ．

5

（35 点）

n を自然数とする．さいころを $2n$ 回投げて n 回以上偶数の目が出る確率を p_n とするとき，$p_n \geqq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4n}$ であることを示せ．

6

（35 点）

f，g をそれぞれ行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換とする．以下では一般に，1 次変換 a，b の合成 $b \circ a$ を簡単に ba と記す．また，aa を a^2，aaa を a^3 と書く．

(1) $f^2 = g^2 = (gf)^3 = i$ を示せ．ただし，i は恒等変換，すなわち任意の点をそれ自身に移す変換である．

(2) 変換 f，gf，fgf，$gfgf$，$fgfgf$ は，変換 g，fg，gfg，$fgfg$，$gfgfg$ をある順序に並べ替えたものである．後者の 5 つの変換はそれぞれ前者の 5 つのどれと等しいか．

(3) 3 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を頂点とする三角形を Δ とする．Δ を f，g で繰り返し変換して得られるすべての三角形の和集合を図示せよ．

問題は，このページで終わりである。