

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1992年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

空間内の 6 つの点

$A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(-1, 0, 0)$, $D(0, -1, 0)$, $E(0, 0, 1)$, $F(0, 0, -1)$

を頂点とする正八面体を, 平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ で切るとき, 切り口の多角形の頂点の座標を求めよ. ただし, a, b, c は正の定数とする.

第 2 問

θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲の角とする.

- (1) $\sin 3\theta = \sin 2\theta$ を満たす θ を求めよ.
- (2) m, n を 0 以上の整数とする. θ についての方程式 $\sin 3\theta = m \sin 2\theta + n \sin \theta$ が解を持つときの (m, n) と, そのときの解 θ を求めよ.

第 3 問

$\triangle ABC$ の外心 O から直線 BC , CA , AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P , Q , R とするとき, $\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ} + 3\overrightarrow{OR} = \vec{0}$ が成立しているとする.

(1) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ の関係式を求めよ.

(2) $\angle A$ の大きさを求めよ.

第 4 問

サイコロをくり返し n 回振って、出た目の数を掛け合わせた積を X とする. すなわち, k 回目に出た目の数を Y_k とすると, $X = Y_1 Y_2 \cdots Y_n$ である.

- (1) X が 3 で割りきれれる確率 p_n を求めよ.
- (2) X が 6 で割りきれれる確率 q_n を求めよ.

第 5 問

空間内で zx 平面上の放物線 $z = 1 - x^2$ を z 軸のまわりに回転して得られる曲面に、4 点 $(t, 0, 1 - t^2)$, $(-t, 0, 1 - t^2)$, $(0, t, 1 - t^2)$, $(0, -t, 1 - t^2)$ (ただし $0 < t < 1$) で、それぞれ接する 4 つの平面を考える.

- (1) この 4 つの接平面と xy 平面で囲まれる立体の体積 $V(t)$ を求めよ.
- (2) $V(t)$ の最小値と、そのときの t の値を求めよ.

第 6 問

a_1, b_1, c_1 は正の整数で $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$ を満たしている. $n = 1, 2, \dots$ について, $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を次式で定める.

$$a_{n+1} = |2c_n - a_n - 2b_n|$$

$$b_{n+1} = |2c_n - 2a_n - b_n|$$

$$c_{n+1} = 3c_n - 2a_n - 2b_n$$

- (1) $a_n^2 + b_n^2 = c_n^2$ を数学的帰納法により証明せよ.
- (2) $c_n > 0$ および $c_n \geq c_{n+1}$ を示せ.
- (3) $c_m > c_{m+1} = c_{m+2}$ となったときの m について, $a_m : b_m : c_m$ を求めよ.