

1992年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

空間内の 6 つの点

$A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(-1, 0, 0), D(0, -1, 0), E(0, 0, 1), F(0, 0, -1)$

を頂点とする正八面体を, 平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ で切るとき, 切り口の多角形の頂点の座標を求めよ. ただし, a, b, c は正の定数とする.

2

(30 点)

θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲の角とする.

- (1) $\sin 3\theta = \sin 2\theta$ を満たす θ を求めよ.
- (2) m, n を 0 以上の整数とする. θ についての方程式 $\sin 3\theta = m \sin 2\theta + n \sin \theta$ が解を持つときの (m, n) と, そのときの解 θ を求めよ.

3

(35 点)

$\triangle ABC$ の外心 O から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P, Q, R とするとき, $\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ} + 3\overrightarrow{OR} = \vec{0}$ が成立しているとする.

- (1) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ の関係式を求めよ.
- (2) $\angle A$ の大きさを求めよ.

4

(35 点)

サイコロをくり返し n 回振って、出た目の数を掛け合わせた積を X とする．すなわち、 k 回目に出た目の数を Y_k とすると、 $X = Y_1 Y_2 \cdots Y_n$ である．

- (1) X が 3 で割りきれれる確率 p_n を求めよ．
- (2) X が 6 で割りきれれる確率 q_n を求めよ．

5

(35 点)

空間内で zx 平面上の放物線 $z = 1 - x^2$ を z 軸のまわりに回転して得られる曲面に、4 点

$$(t, 0, 1 - t^2), \quad (-t, 0, 1 - t^2), \quad (0, t, 1 - t^2), \quad (0, -t, 1 - t^2) \quad (\text{ただし } 0 < t < 1)$$

で、それぞれ接する 4 つの平面を考える．

- (1) この 4 つの接平面と xy 平面で囲まれる立体の体積 $V(t)$ を求めよ．
- (2) $V(t)$ の最小値と、そのときの t の値を求めよ．

6

(35 点)

a_1, b_1, c_1 は正の整数で $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$ を満たしている． $n = 1, 2, \dots$ について、 $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を次式で定める．

$$a_{n+1} = |2c_n - a_n - 2b_n|$$

$$b_{n+1} = |2c_n - 2a_n - b_n|$$

$$c_{n+1} = 3c_n - 2a_n - 2b_n$$

- (1) $a_n^2 + b_n^2 = c_n^2$ を数学的帰納法により証明せよ．
- (2) $c_n > 0$ および $c_n \geq c_{n+1}$ を示せ．
- (3) $c_m > c_{m+1} = c_{m+2}$ となったときの m について、 $a_m : b_m : c_m$ を求めよ．

問題は、このページで終わりである。

