

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1991 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：200 点

第 1 問

y 軸上の点 $P(0, -p)$ ($p > 0$) と定点 $A(0, 2)$ に対し, AP を直径とする円を C とする.
点 $Q(s, t)$ ($s \geq 0$) を, PQ の中点が「 C と直線 $y = 1$ の交点」となるようにとる.

- (1) s, t を求めよ.
- (2) P が y 軸上の負の部分のすべてを動くとき, 対応する Q 全体はどのような曲線になるか. また直線 PQ はこの曲線の, 点 Q での, 接線となっていることを示せ.

第 2 問

行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とする.

- (1) f による全平面の像は直線 $l: 2x + y = 0$ であることを示せ.
- (2) 平面上の点 $P(x, y)$ に対し, l 上の点で P との距離が最小となる点を Q とし, f による像が Q となる点のうちで, 原点との距離が最小となる点を P' とする. P' の座標 (x', y') を x, y で表せ.
- (3) 点 $P(x, y)$ に点 $P'(x', y')$ を対応させる写像を g とする. 合成写像 $f \circ g \circ f$ および $g \circ f \circ g$ を求めよ.

第 3 問

3組の対辺が互いに垂直であるような4面体 V がある．このとき， V の各辺の中点は， V の重心を中心とするある1つの球面上にあることを示せ．

第 4 問

実数 a, b ($0 \leq a < \frac{\pi}{4}$, $0 \leq b < \frac{\pi}{4}$) に対し, 次の不等式の成り立つことを示せ.

$$\sqrt{\tan a \cdot \tan b} \leq \tan \left(\frac{a+b}{2} \right) \leq \frac{1}{2}(\tan a + \tan b)$$

第 5 問

袋の中に N 個の白玉と 3 個の赤玉がある。「袋の中の $(N + 3)$ 個の玉から無作為に 1 個を取り出し、つぎに（外部にある）白玉を 1 個袋に入れる」という試行をくり返す. n 回目の試行で赤玉をとり出す確率を P_n とする. また n 回目の試行を行う前, 袋の中に赤玉が i 個 ($i = 1, 2, 3$) あり, かつ n 回目の試行で赤玉をとり出す確率を $P_{i,n}$ ($i = 1, 2, 3$) とする. 従って $P_n = P_{1,n} + P_{2,n} + P_{3,n}$ である.

(1) $P_{1,n+1}$, $P_{2,n+1}$, $P_{3,n+1}$ を $P_{1,n}$, $P_{2,n}$, $P_{3,n}$ で表す式（漸化式）を求めよ.

(2) P_{n+1} を P_n で表す式を求め, P_n を求めよ.

第 6 問

関数 $y = f(x)$ ($x \geq 0$) は次の条件 (イ), (ロ) を満たしている.

(イ) $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続, かつ $f(x) > 0$.

(ロ) 正の定数 a があって

$$\int_0^x (f(t))^{-a} dt = \int_a^{f(x)} \left(e^{-\frac{t^2}{2}} + t^{-a} \right) dt$$

(1) (ロ) の等式の両辺を x について微分して得られる (y の満たす) 微分方程式を書け. また $f(0)$ の値を求めよ.

(2) 正の定数 b, c があって次の不等式 (あ), (い) を満たしていることを示せ.

(あ) $b \leq f'(x) \leq 1$.

(い) $0 \leq f(x) \left(\frac{1}{f'(x)} - 1 \right) \leq c$.

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ を求めよ. また $f'(x)$ の最小値を求めよ.