

# 1991年度入学試験問題

## 数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

### (注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。





1

(30 点)

$y$  軸上の点  $P(0, -p)$  ( $p > 0$ ) と定点  $A(0, 2)$  に対し,  $AP$  を直径とする円を  $C$  とする. 点  $Q(s, t)$  ( $s \geq 0$ ) を,  $PQ$  の中点が「 $C$  と直線  $y = 1$  の交点」となるようにとる.

- (1)  $s, t$  を求めよ.
- (2)  $P$  が  $y$  軸上の負の部分のすべてを動くとき, 対応する  $Q$  全体はどのような曲線になるか. また直線  $PQ$  はこの曲線の, 点  $Q$  での, 接線となっていることを示せ.

2

(30 点)

行列  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  で表される 1 次変換を  $f$  とする.

- (1)  $f$  による全平面の像は直線  $l: 2x + y = 0$  であることを示せ.
- (2) 平面上の点  $P(x, y)$  に対し,  $l$  上の点で  $P$  との距離が最小となる点を  $Q$  とし,  $f$  による像が  $Q$  となる点のうちで, 原点との距離が最小となる点を  $P'$  とする.  $P'$  の座標  $(x', y')$  を  $x, y$  で表せ.
- (3) 点  $P(x, y)$  に点  $P'(x', y')$  を対応させる写像を  $g$  とする. 合成写像  $f \circ g \circ f$  および  $g \circ f \circ g$  を求めよ.

3

(35 点)

3 組の対辺が互いに垂直であるような 4 面体  $V$  がある. このとき,  $V$  の各辺の中点は,  $V$  の重心を中心とするある 1 つの球面上にあることを示せ.

4

(35 点)

実数  $a, b$  ( $0 \leq a < \frac{\pi}{4}$ ,  $0 \leq b < \frac{\pi}{4}$ ) に対し, 次の不等式の成り立つことを示せ.

$$\sqrt{\tan a \cdot \tan b} \leq \tan \left( \frac{a+b}{2} \right) \leq \frac{1}{2}(\tan a + \tan b)$$

5

(35 点)

袋の中に  $N$  個の白玉と 3 個の赤玉がある. 「袋の中の  $(N+3)$  個の玉から無作為に 1 個を取り出し, つぎに (外部にある) 白玉を 1 個袋に入れる」という試行をくり返す.  $n$  回目の試行で赤玉をとり出す確率を  $P_n$  とする. また  $n$  回目の試行を行う前, 袋の中に赤玉が  $i$  個 ( $i = 1, 2, 3$ ) あり, かつ  $n$  回目の試行で赤玉をとり出す確率を  $P_{i,n}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とする. 従って  $P_n = P_{1,n} + P_{2,n} + P_{3,n}$  である.

- (1)  $P_{1,n+1}$ ,  $P_{2,n+1}$ ,  $P_{3,n+1}$  を  $P_{1,n}$ ,  $P_{2,n}$ ,  $P_{3,n}$  で表す式 (漸化式) を求めよ.
- (2)  $P_{n+1}$  を  $P_n$  で表す式を求め,  $P_n$  を求めよ.

関数  $y = f(x)$  ( $x \geq 0$ ) は次の条件 (イ), (ロ) を満たしている.

(イ)  $f(x)$  は微分可能で  $f'(x)$  は連続, かつ  $f(x) > 0$ .

(ロ) 正の定数  $a$  があって

$$\int_0^x (f(t))^{-a} dt = \int_a^{f(x)} \left( e^{-\frac{t^2}{2}} + t^{-a} \right) dt$$

(1) (ロ) の等式の両辺を  $x$  について微分して得られる ( $y$  の満たす) 微分方程式を書け. また  $f(0)$  の値を求めよ.

(2) 正の定数  $b, c$  があって次の不等式 (あ), (い) を満たしていることを示せ.

(あ)  $b \leq f'(x) \leq 1$ .

(い)  $0 \leq f(x) \left( \frac{1}{f'(x)} - 1 \right) \leq c$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$  を求めよ. また  $f'(x)$  の最小値を求めよ.

問題は、このページで終わりである。



