

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1990 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：200 点

第 1 問

2つの曲線 $y = x^3 - x$ と $y = x^2 - a$ が 1 点 P を通り, P において共通の接線をもっている. この 2つの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ.

第 2 問

三角形 ABC において、 $\angle B = 60^\circ$ 、B の対辺の長さ b は整数、他の 2 辺の長さ a, c はいずれも素数である。このとき三角形 ABC は正三角形であることを示せ。

第 3 問

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表わされる 1 次変換を f , $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ で表わされる 1 次変換を g とする.

- (1) どんなベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ に対しても, 内積の間に $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot g(\vec{v})$ の関係が成り立つことを示せ.
- (2) f が原点 O を通る直線 l をそれ自身にうつすとする. l 上に O と異なる点 P をとり, P の f による像を Q , g による像を R とする. このとき, 次の (イ), (ロ) のいずれかが成り立つことを示せ.
 - (イ) $Q = R$.
 - (ロ) 3 点 Q, R, O は直角三角形の頂点となる.

第 4 問

半径 1 , $1 - 2r$ の同心円の間に半径 r の円が n 個, 互いに交わずに入っているという状態を考える. n (≥ 2) を固定した上で, r を変化させる.

(1) r は $0 < r \leq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}}$ の範囲になければならないことを示せ.

(2) これら $n + 2$ 個の円の面積の総和が最小となる r の値を求めよ.

第 5 問

正 N 角形の頂点に $0, 1, \dots, N-1$ と時計まわりに番号がつけてある．頂点 0 を出発点とし，サイコロを投げて出た目の数だけ頂点を時計まわりに移動し，着いた頂点の番号を X とする．次にもう 1 度サイコロを投げて出た目の数だけ，頂点 X から時計まわりに移動し，着いた頂点の番号を Y とする．このようにして定めた確率変数 X, Y について

- (1) $N = 5, 6$ のそれぞれの場合について， X と Y は互いに独立か．
- (2) X, Y が互いに独立となる N ($N \geq 3$) をすべて求めよ．

ただし確率変数 X, Y が互いに独立であるとは， $X = i$ となる確率 $P(X = i)$ と $X = i$ かつ $Y = j$ となる確率 $P(X = i, Y = j)$ との間に，次の等式 (*) が任意の i, j ($0 \leq i, j \leq N-1$) について成り立つことである．

$$(*) \quad P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$$

第 6 問

円 $C: x^2 + y^2 = 1$ を内部に含む楕円 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) がある. D 上の 1 点 $P(0, b)$ から C に 1 つの接線をひき, その延長が再び D と交わる点を Q とする. Q から C に PQ とは異なる接線をひき, その延長が再び D と交わる点を R とする. R から C に QR と異なる接線をひき, その延長が再び D と交わる点を S とすると, $S = P$ となった. このとき a を b の関数として表わせ.