

1990年度入学試験問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページがある。
3. 問題は全部で6題ある。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

2つの曲線 $y = x^3 - x$ と $y = x^2 - a$ が1点 P を通り, P において共通の接線をもっている. この2つの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ.

2

(30 点)

三角形 ABC において, $\angle B = 60^\circ$, B の対辺の長さ b は整数, 他の2辺の長さ a , c はいずれも素数である. このとき三角形 ABC は正三角形であることを示せ.

3

(35 点)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表わされる1次変換を f , $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ で表わされる1次変換を g とする.

- (1) どんなベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ に対しても, 内積の間に $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot g(\vec{v})$ の関係が成り立つことを示せ.
- (2) f が原点 O を通る直線 l をそれ自身にうつすとする. l 上に O と異なる点 P をとり, P の f による像を Q , g による像を R とする. このとき, 次の (イ), (ロ) のいずれかが成り立つことを示せ.
 - (イ) $Q = R$.
 - (ロ) 3点 Q , R , O は直角三角形の頂点となる.

4

(35 点)

半径 1, $1 - 2r$ の同心円の間に半径 r の円が n 個, 互いに交わらずに入っているという状態を考える. n (≥ 2) を固定した上で, r を変化させる.

(1) r は $0 < r \leq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}}$ の範囲になければならないことを示せ.

(2) これら $n + 2$ 個の円の面積の総和が最小となる r の値を求めよ.

5

(35 点)

正 N 角形の頂点に $0, 1, \dots, N - 1$ と時計まわりに番号がつけてある. 頂点 0 を出発点とし, サイコロを投げて出た目の数だけ頂点を時計まわりに移動し, 着いた頂点の番号を X とする. 次にもう 1 度サイコロを投げて出た目の数だけ, 頂点 X から時計まわりに移動し, 着いた頂点の番号を Y とする. このようにして定めた確率変数 X, Y について

(1) $N = 5, 6$ のそれぞれの場合について, X と Y は互いに独立か.

(2) X, Y が互いに独立となる N ($N \geq 3$) をすべて求めよ.

ただし確率変数 X, Y が互いに独立であるとは, $X = i$ となる確率 $P(X = i)$ と $X = i$ かつ $Y = j$ となる確率 $P(X = i, Y = j)$ との間に, 次の等式 (*) が任意の i, j ($0 \leq i, j \leq N - 1$) について成り立つことである.

$$(*) \quad P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$$

6

(35 点)

円 $C: x^2 + y^2 = 1$ を内部に含む楕円 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) がある. D 上の 1 点 $P(0, b)$ から C に 1 つの接線をひき, その延長が再び D と交わる点を Q とする. Q から C に PQ とは異なる接線をひき, その延長が再び D と交わる点を R とする. R から C に QR と異なる接線をひき, その延長が再び D と交わる点を S とすると, $S = P$ となった. このとき a を b の関数として表わせ.

問題は、このページで終わりである。

