

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1989年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

$OA_1 = OB_1 = 1$, $\angle B_1OA_1 = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) であるような二等辺三角形 OA_1B_1 がある. 辺 A_1B_1 の中点を B_2 とし, 辺 OA_1 上に $OA_2 = OB_2$ となる点 A_2 をとり, 二等辺三角形 OA_2B_2 を作る. 以下同様にして, $n > 2$ についても二等辺三角形 OA_nB_n を作っていく. 辺 OA_n の長さを a_n とおく.

(1) $a_3 \cdot \sin \frac{\theta}{4}$ を計算せよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を計算せよ.

第 2 問

n 個 ($n \geq 3$) の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ があり, 各 a_i は他の $n-1$ 個の相加平均より大きくはないという. このような $a_1, a_2, \dots, a_n$ の組をすべて求めよ.

第 3 問

$f(x)$ は x の 3 次式で, $f(x)$ をその導関数 $f'(x)$ で割ったときの余りは定数である. このとき方程式 $f(x) = 0$ をみたす実数 x はただ一つであることを示せ.

第 4 問

四面体 $OABC$ において、 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ はたがいに直交している. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ となる点 G を通り $\overrightarrow{OG}$ に直交する平面による四面体 $OABC$ の切り口は、どのような図形か. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ のそれぞれの長さ a , b , c の関係により区分して述べよ. また, $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$ のとき, その切り口の面積を求めよ.

第 5 問

N 色 ($N \geq 3$) の絵の具のセットがある. 一つの立方体の面を各面独立に, 各色を確率 $\frac{1}{N}$ で選んで塗る. このとき, 塗られた結果が, 使用された色の数が 3 以内で, かつ, 同色の面が隣り合うことになっていない確率 $P(N)$ を求めよ. また, N の異なる値 a, b に対して, $P(a)$ と $P(b)$ の大きさを比較せよ.

第 6 問

高さ 10 m の円錐形の内部をもつタンクがあり，円錐の底面が下側にあって水平であるように置かれている．タンク内の水位（水の深さ）が $y\text{ m}$ ($y < 10$) のときには $(10 - y)\text{ l}$ / 分の速度で注水することにする．タンクが空のときに注水を始めて，9 時間後に水位が 2 m になった．タンクに水が一杯になるのは，あと何時間後か．