

入学試験過去問題

数 学

京都大学（理系）

対象年度：1988年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：200点

第 1 問

実数 a, b に対し, $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = f(f(x))$ とする.

- (1) $g(x) - x$ は $f(x) - x$ で割り切れることを示せ.
- (2) $g(p) = p$ かつ $f(p) \neq p$ をみたす実数 p が存在するような点 (a, b) の範囲を図示せよ.

第 2 問

三角形 ABC において、辺 AB , BC , CA をそれぞれ $2:1$ に内分する点を A_1 , B_1 , C_1 とし、また線分 A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 をそれぞれ $2:1$ に内分する点を A_2 , B_2 , C_2 とする。このとき、三角形 $A_2B_2C_2$ は三角形 ABC に相似であることを示せ。

第 3 問

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で, $x^2 - 3y^2 = 1$, $x > 0$, $y \geq 1$ ならば, $x'^2 - 3y'^2 = 1$, $0 \leq y' < y$ が成立することを示せ.

(2) x, y が $x^2 - 3y^2 = 1$ をみたす自然数ならば, ある自然数 n をとると $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となることを示せ.

第 4 問

各辺の長さが 2 の正四面体 $ABCD$ を座標空間内で考える．辺 AB は x 軸上にあつて，その中点は原点 O と一致し，辺 CD の中点 M は z 軸の正の部分にあるとする．また， $0 < t < 1$ をみたす実数 t について，線分 OM を $t : (1-t)$ の比に内分する点を通り， OM に垂直な平面を α とする．

- (1) 2 頂点 C, D の座標を求めよ．ただし， C の y 座標は正であるとする．
- (2) 平面 α による正四面体 $ABCD$ の切口は，どのような平面図形か．
- (3) 平面 α で分けられた正四面体 $ABCD$ の 2 つの部分のうち，原点に近い部分の体積を求めよ．

第 5 問

一辺の長さが 1 の正方形と、一辺の長さが 2 の正方形でできたタイルが多数大きな袋に入っている．でたらめにタイルを一枚取り出すとき、小さいタイルが取り出される確率を p ，大きいタイルが取り出される確率を $q = 1 - p$ とする．縦の長さが 3，横の長さが 6 の長方形に，取り出されたタイルを敷きつめていくとき，ちょうど n 回でこの長方形が過不足なく敷きつめられる確率を求めよ．

第 6 問

単位を cm とする. $y = \frac{a}{x} + b$, $0 \leq y \leq 8$ で表される曲線を y 軸のまわりに回転させて作った曲面を側面にもつような, 底の平らな容器がある. ただし, 上面の半径は 1cm, 底面の半径は 5cm である.

- (1) この容器に深さ 6cm まで水を入れたときの水の体積を求めよ.
- (2) この容器に毎秒 $k\text{cm}^3$ の割合で水を入れるとき, 深さ 3cm のときの水面の上昇速度を求めよ.